

Master Omega 2

Option Astrophysique

Analyse des Images en Astrophysique

Cours d'Albert Bijaoui

Année 2005-06

Schéma général du cours

- Bases de l'imagerie numérique
- Généralités sur l'analyse des images
- Analyse interactive
- Analyse texturale
- Analyse paramétrique
- Extraction des paramètres principaux
- Segmentation des images astronomiques
- Analyse morphologique
- Morphologie mathématique
- Analyse multiéchelle
- Analyse multibande

1^{ère} leçon

- Base d'imagerie numérique
 - Échantillonnage
 - Relation objet - image
 - Fonction d'étalement / Fréquence de coupure
 - Théorème de Shannon
 - Valeur en un point
 - Bruit des images
 - Bruit de photons
 - Bruit réel
- Objectifs de l'analyse d'image
 - Subjectivité

2^{ème} leçon

- Analyse interactive
 - Objectifs
 - Moyens matériels - Logiciels spécialisés
 - Débruitage
 - Filtrages et Lissages
 - Méthodes non linéaires
 - Déconvolution
 - Inversions directe et itératives
 - Régularisation
 - Changement des contrastes : LUT
- Analyse texturale
 - Objectifs
 - Statistiques de base
 - Analyse de Fourier
 - Notion de texture
 - Modèles & paramètres
- Exercice sur l'interpolation

3^{ième} Leçon

- Analyse paramétrique
 - Modèles déterministes
 - Estimation des paramètres
 - Validité du modèle
 - Rejet itératif
- Extraction des paramètres principaux
 - Le fond de ciel
 - Les positions
 - Le flux
- Exercice sur l'analyse statistique

4^{ième} leçon

- Segmentation des images astronomiques
 - Notion d'objet
 - Bords et contours
 - Connexité et décomposition en régions
 - Primitives brutes et réduites de l'analyse
- Analyse morphologique
 - Analyse des contours
 - Profil radial
 - Profil angulaire
 - Paramétrage de la forme
- Exercice sur la modélisation

5^{ème} leçon

- Morphologie mathématique
 - MM sur des images binaires
 - Dilatation, Erosion
 - Fermeture, Ouverture
 - Squelette
 - MM sur des images à niveaux de gris
 - Notion d'ombre
 - Généralisation des opérateurs
 - Transformation chapeau haut de forme
- Lignes de vallée (bassins versants)
- Exercice sur l'analyse morphologique

6^{ième} leçon

- Analyse multiéchelle
 - Fonction d'échelle & ondelettes
 - Algorithmes de transformation
 - Application à la vision
- Analyse multibande
 - Couleurs et classes
 - Analyse de nuées
 - Expansion de Karhunen-Loève
 - Analyse en Composantes Indépendantes
- Exercice sur la morphologie mathématique

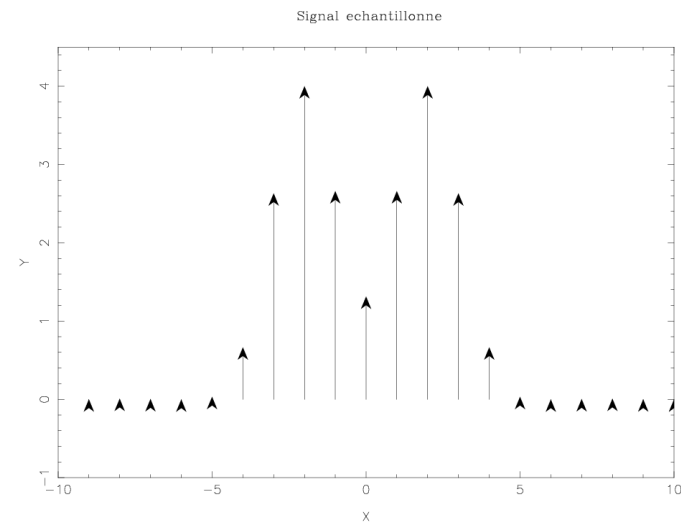
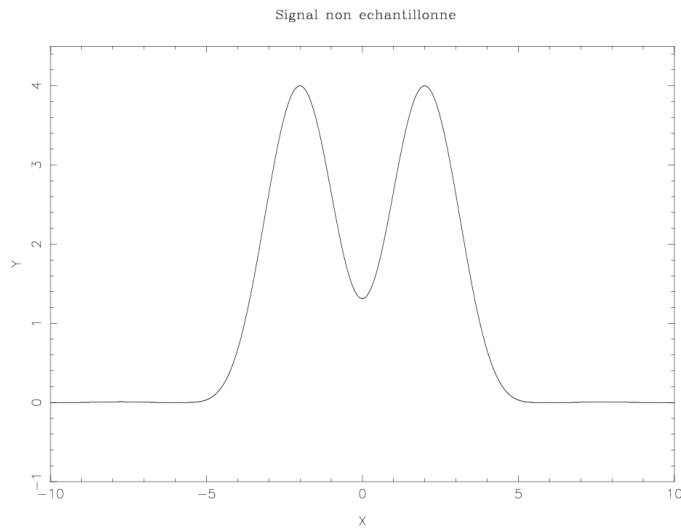
1^{ère} leçon

Bases de l'imagerie Numérique Généralités sur l'analyse d'images

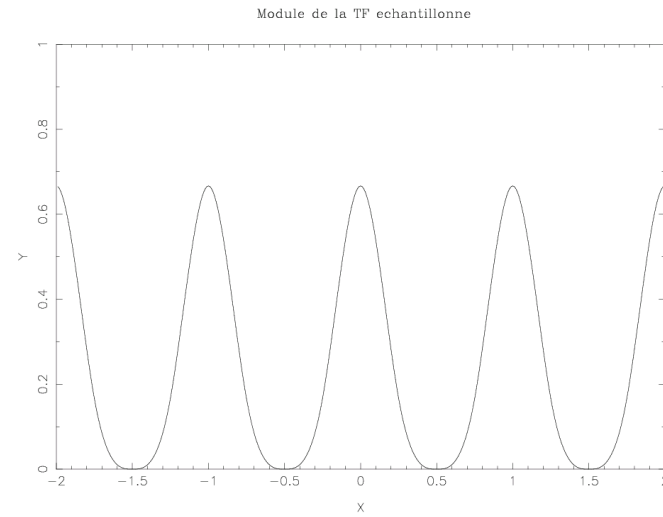
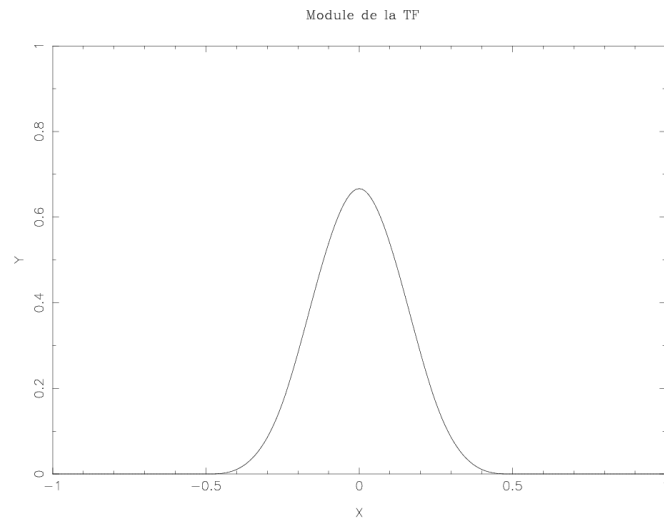
Le théorème d'échantillonnage

- But & historique
- Fonction $\psi(x)$ ou peigne de Dirac
- Effet dans le plan de Fourier
- Fréquence de coupure
- Pas de Shannon. Critère de Nyquist
- Fonction porte et sinus cardinal
- Théorème d'échantillonnage

Échantillonnage dans le plan direct

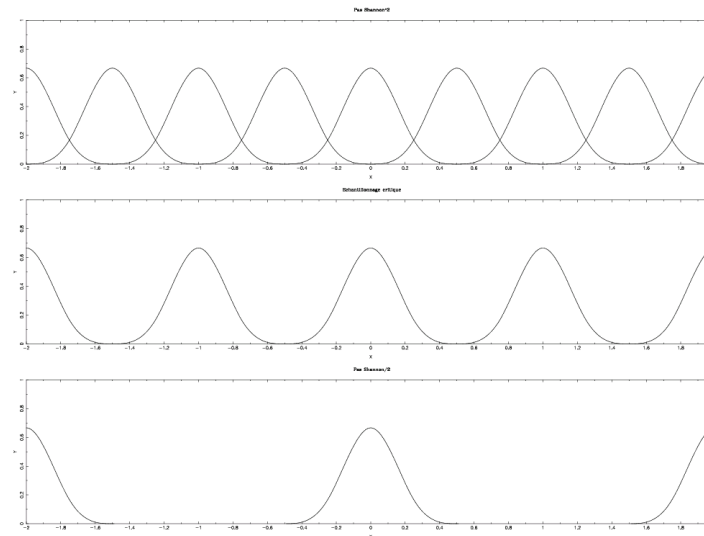


Échantillonnage vu dans l'Espace de Fourier



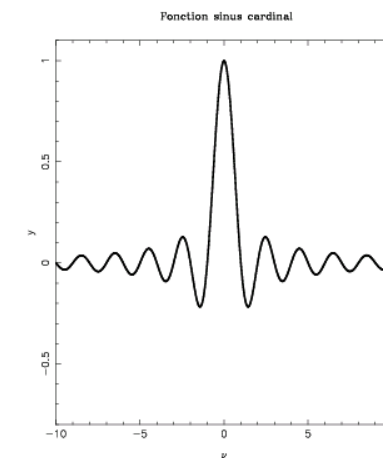
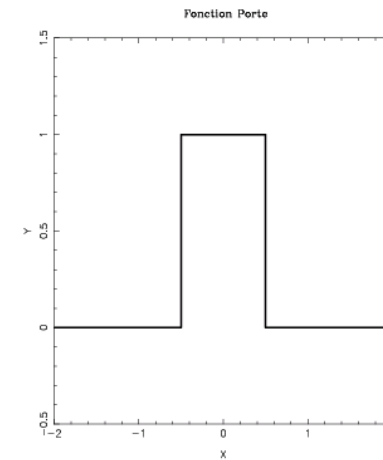
Pas de Shannon / Nyquist

- Fréquence de coupure
- Recouvrement des répliques
- Pas de Shannon
- Aliasing



Fonction porte et sinus cardinal

- Fonction porte
- Multiplication dans le plan de Fourier
- Effet dans l'espace direct
 - Convolution par un sinus cardinal
 - Oscillations à longue portée



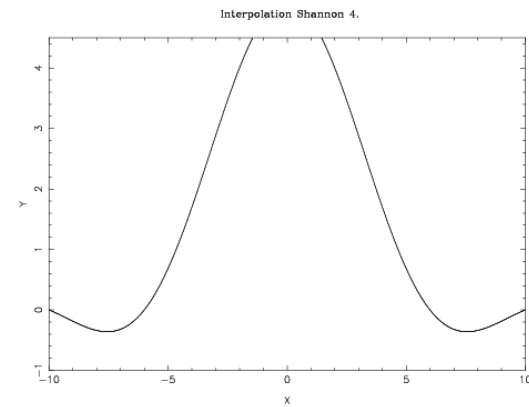
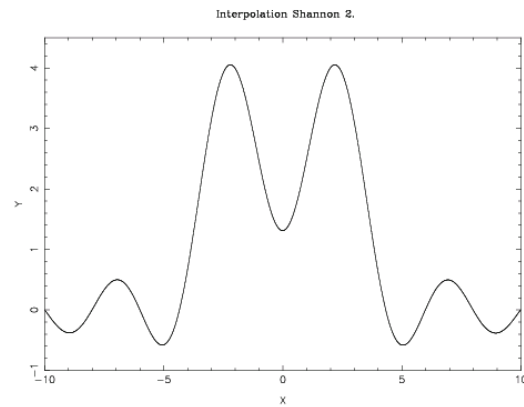
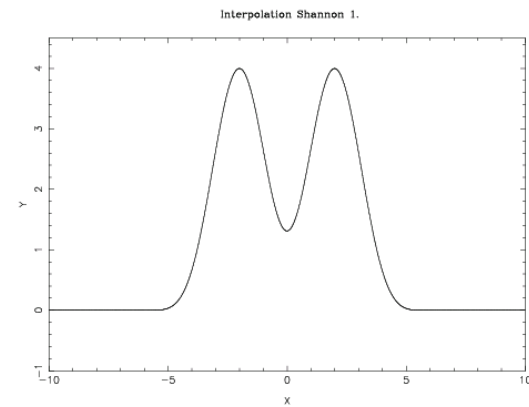
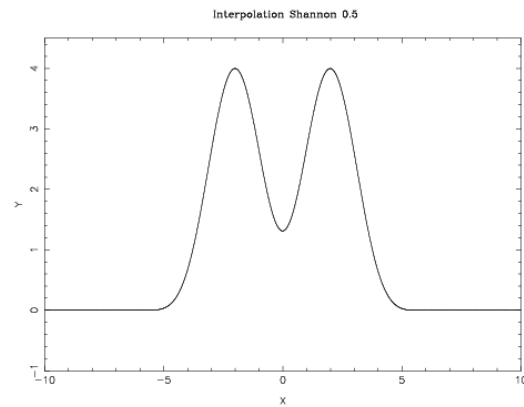
Théorème d'échantillonnage

- Interpolation de Shannon

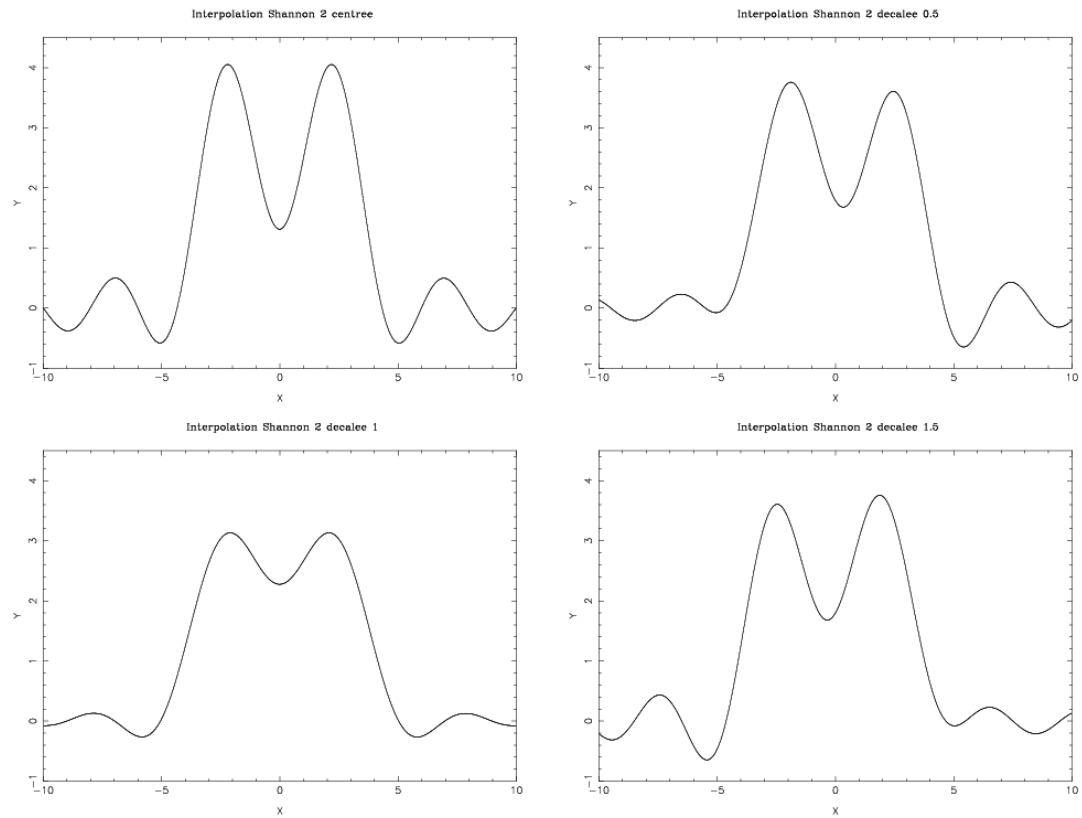
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nh) \frac{\sin(\pi(\frac{x}{h} - n))}{\pi(\frac{x}{h} - n)}$$

- Applicabilité
 - Problème des limites
 - Lente convergence du sinus cardinal
- FFT, Cyclo-stationnarité et interpolation

Variations avec le pas



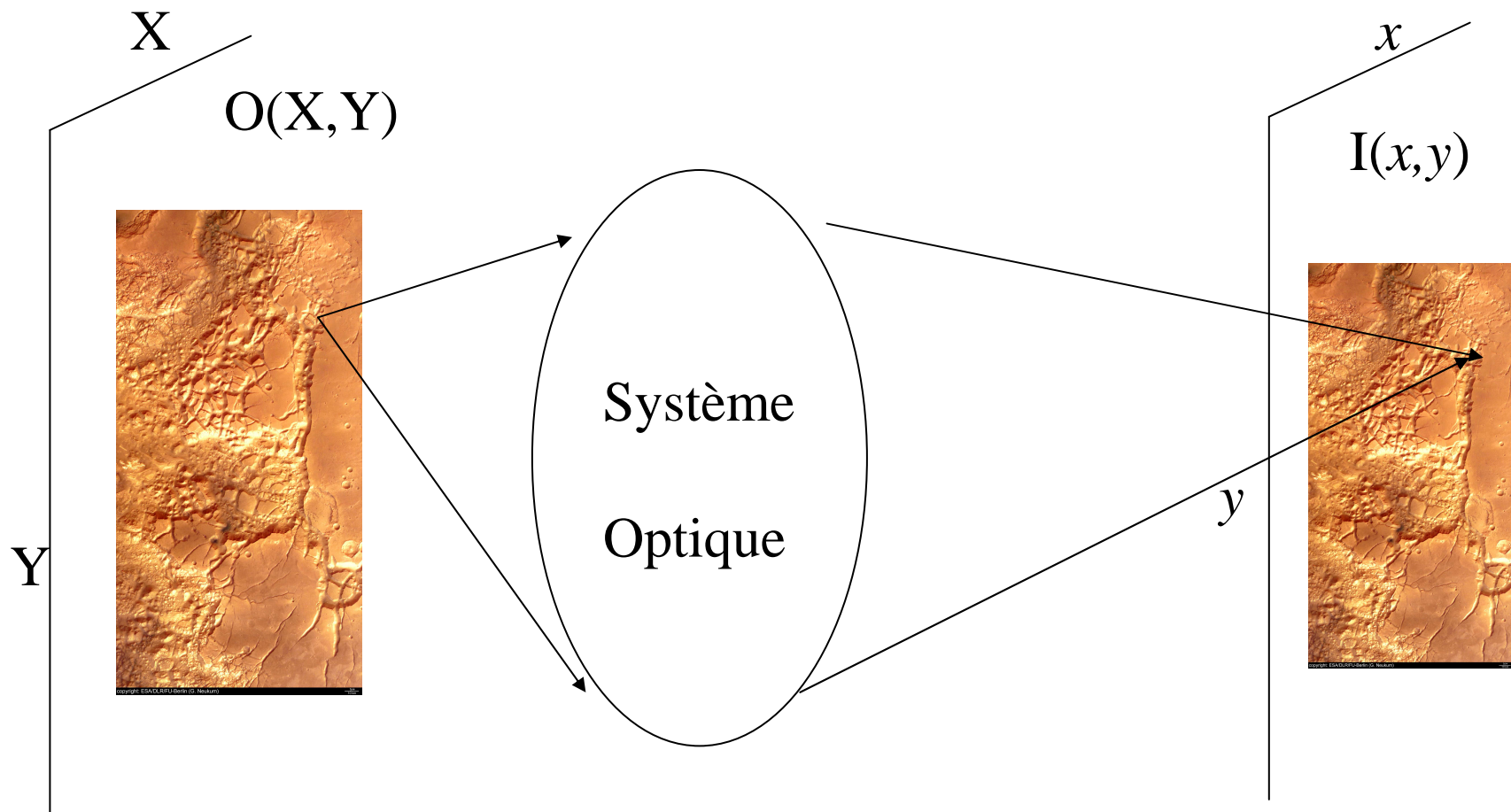
Non invariance par translation



Relation Objet Image

- Relation Objet - Image.
 - Système imageur
 - Système linéaire
 - Invariance par translation
 - Fonction d'étalement
- Echantillonnage d'une image

Systeme Optique



Relation Objet-Image

- Linéarité du système optique

- Problème de la cohérence

- Relation résultant de la linéarité

$$I(x, y) = \iint P(x, y; X, Y) O(X, Y) dXdY$$

- Mise dans le repère de l'image

- Invariance par translation

$$P(x, y; X, Y) \equiv P(x - X, y - Y)$$

- Relation finale

$$I(x, y) = \iint P(x - X, y - Y) O(X, Y) dXdY$$

Fonction d'étalement

- $P(x,y)$ est appelée fonction d'étalement (*Point Spread Function = PSF*)

- Dans le plan de Fourier

$$\hat{I}(u, v) = \hat{P}(u, v)\hat{O}(u, v)$$

- $\hat{P}(u, v)$ est appelée fonction de transfert optique
- (u, v) sont les fréquences spatiales du système
- Un système optique joue le rôle de filtre spatiale
- Il existe toujours des fréquences de coupures (u_c, v_c)

Le bruit d'une image

- Mesure du pixel: variable aléatoire

- Bruit de photons

- Indépendance des événements
 - Approximation par une statistique de Poisson

$$p(n) = \frac{m^n}{n!} e^{-m}$$

- Thermique, de lecture, d'amplification, ...

- Approximation gaussienne

- Champs aléatoires

- La valeur en chaque point est la réalisation d'une variable aléatoire

- Stationnarité

- Champs Gaussiens

- Processus gaussiens stationnaires

Echantillonnage & Bruit

- Dépendance du bruit entre pixels
 - Ordre deux : Variogramme (fonction de structure)
$$V(M, M') = \frac{1}{2} E[f(M) - f(M')]^2$$
 - fonction d'autocorrélation (moyenne nulle)
$$C(M, M') = E[f(M)f(M')]$$
 - Stationnarité et variance
- Densité spectrale de bruit
 - Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation
- Coloration du bruit
 - Fréquence de coupure du bruit
- Echantillonnage d'une image bruitée
 - Filtrage préalable : Spot d'intégration

Discrétisation des niveaux

- Discrétisation des niveaux.
 - Dépendance du bruit avec le signal
 - Discrétisation uniforme si le bruit est indépendant du signal
 - Variation de la largeur des niveaux avec l'écart-type du bruit
 - Critère de Max : minimisation de l'erreur quadratique → Code de Max
 - Dynamique du signal → Nombre de bits
- Taille des images Numériques.

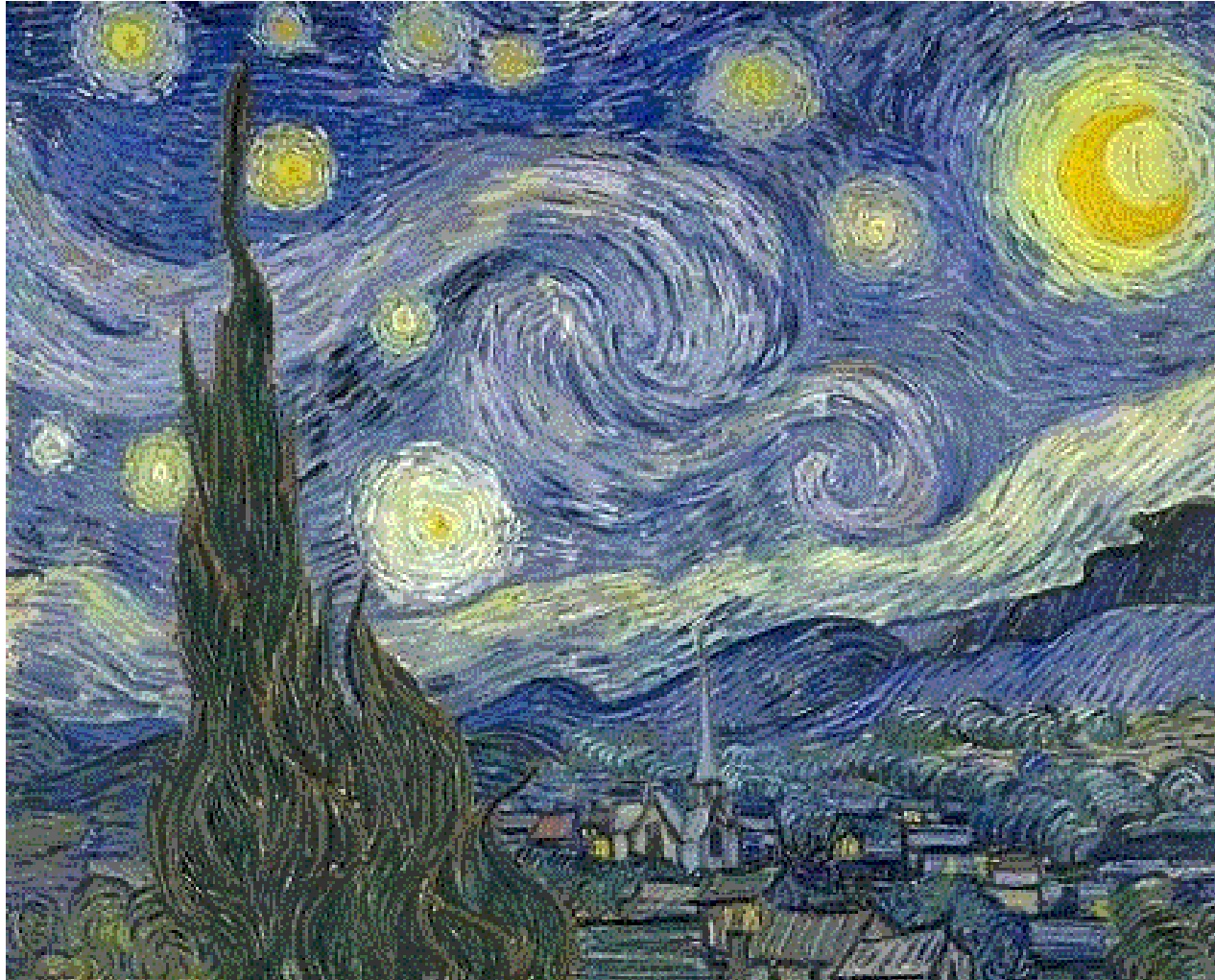
Valeur en un point

- Relation coord. pixels / coord. physiques
 - Pour mettre en correspondance des images
- Interpolation de Shannon
 - Convergence trop lente des sinus cardinales
 - Utilisation de la FFT
 - Pour agrandir d'un facteur constant
- Interpolations à support spatial limité
 - Plus proche voisin
 - Interpolation linéaire
 - Interpolation spline / B-spline
- Extrapolations

Objectifs de l'analyse des Images

- Identifier, mesurer et classer les sources astronomiques présentes sur l'image
- Détecter les sources nouvelles
- Détecter des sources de nouveaux types
- Détecter des variations
- Paramétrer l'image afin de *l'indexer*
- Paramétrer l'image afin de *l'interpréter*

Définir un but



Différents niveaux d'Analyse

- Extraire des données pour classifier
 - La palette de couleur, la largeur des traits
- Extraire des données pour indexer
 - Éléments caractéristiques du tableau
- Extraire des données pour décider
 - Quel est l'auteur?
 - Le tableau est-il faux?

De nombreux outils

- *L'analyse interactive* : transférer les décisions à l'utilisateur
- *Analyse globale* : mesurer la texture
- *Analyse paramétrique* : modéliser l'image
- *Analyse Morphologique* : extraire et mesurer des structures
- *Analyse multiéchelle* : extraire des objets hiérarchiquement distribués

2^{ième} leçon

Analyse interactive

Analyse texturale

Exercice sur l'interpolation

Analyse interactive

- Objectifs
 - Le *Quick-look*
 - Utilisation des connaissances
- Moyens
 - Matériels
 - Souris, réticules électroniques
 - Tablettes graphiques
 - Visualisations graphiques /images
 - 2D/3D, visualisation dynamique
 - Logiciels spécialisés
 - MATLAB, IDL, ..
 - Logiciels astronomiques (skycat, fv, Midas, IRAF, ..)

Débruitage

- Filtrages
 - Seuillage en fréquence : Shannon
 - Atténuation des coefficients de Fourier
 - Signal et Bruit gaussiens : Wiener Kolmogorov
- Lissages
 - Convolution avec un masque
 - Moyennes (pondérées) glissantes
 - Sheppard : représentation locale polynomiale
- Transformations ondelettes
 - Transformation espace-échelle
 - Atténuation des coefficients

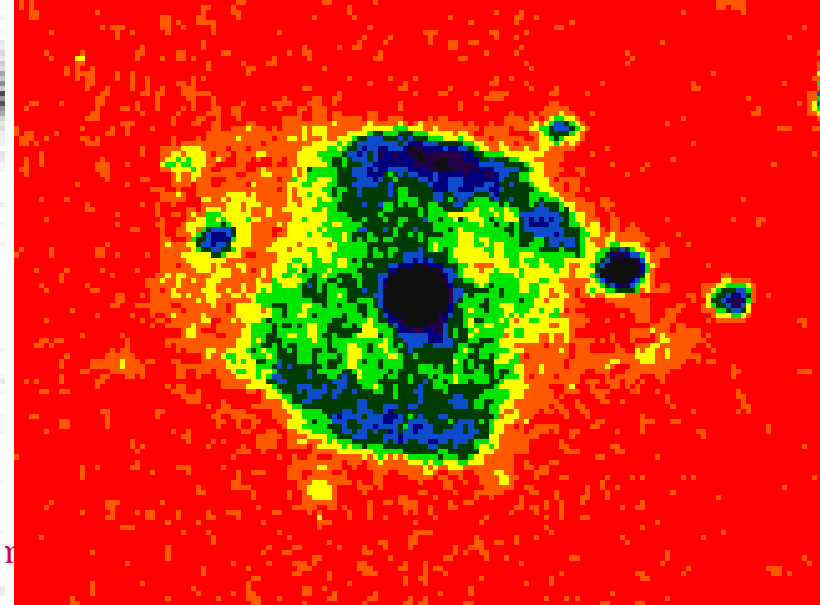
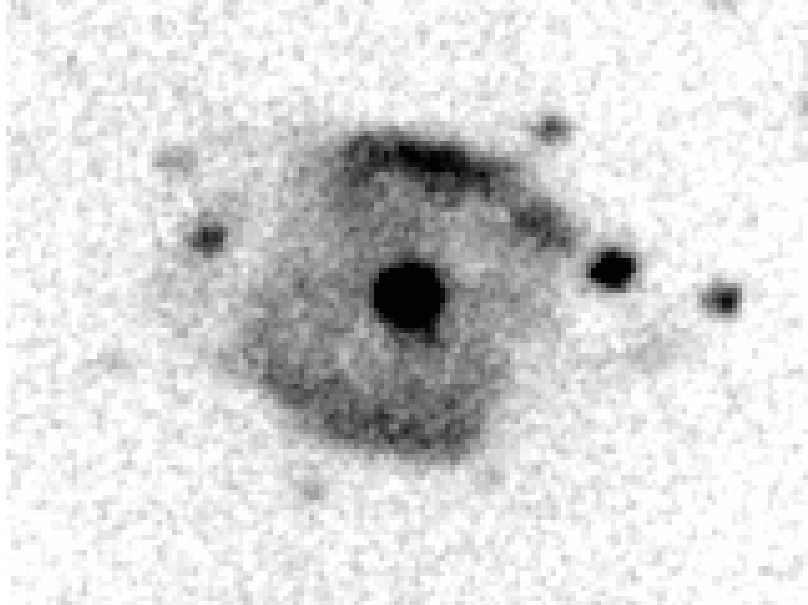
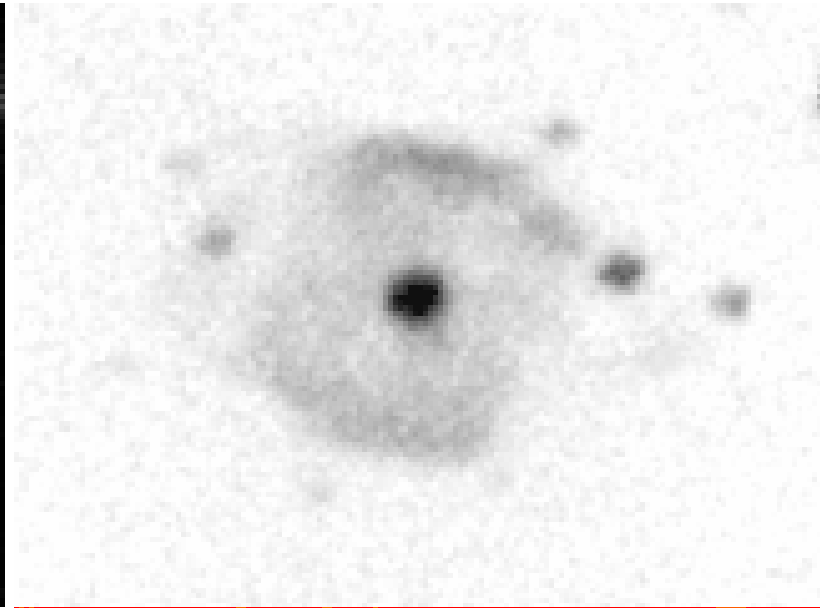
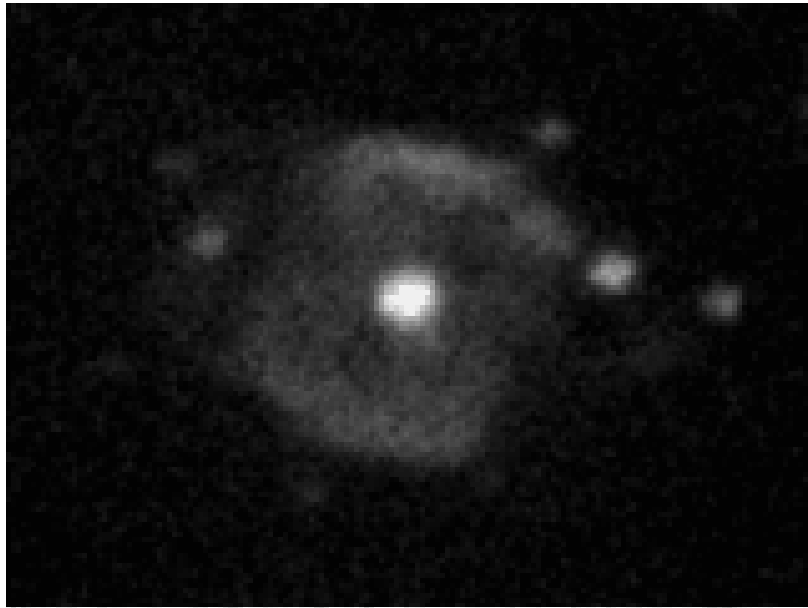
Déconvolution

- Inversions directes
 - Existence d'une fréquence de coupure
 - Inverse de Bracewell
 - Couplage avec un débruitage
 - Déconvolution de Wiener (Hellström)
 - Déconvolution après débruitage
- Déconvolutions itératives
 - Méthode de Van Cittert
 - Méthode de Landweber (Gradient)
 - Méthode de Richardson-Lucy
 - Débruitage du résidus
- Exemples

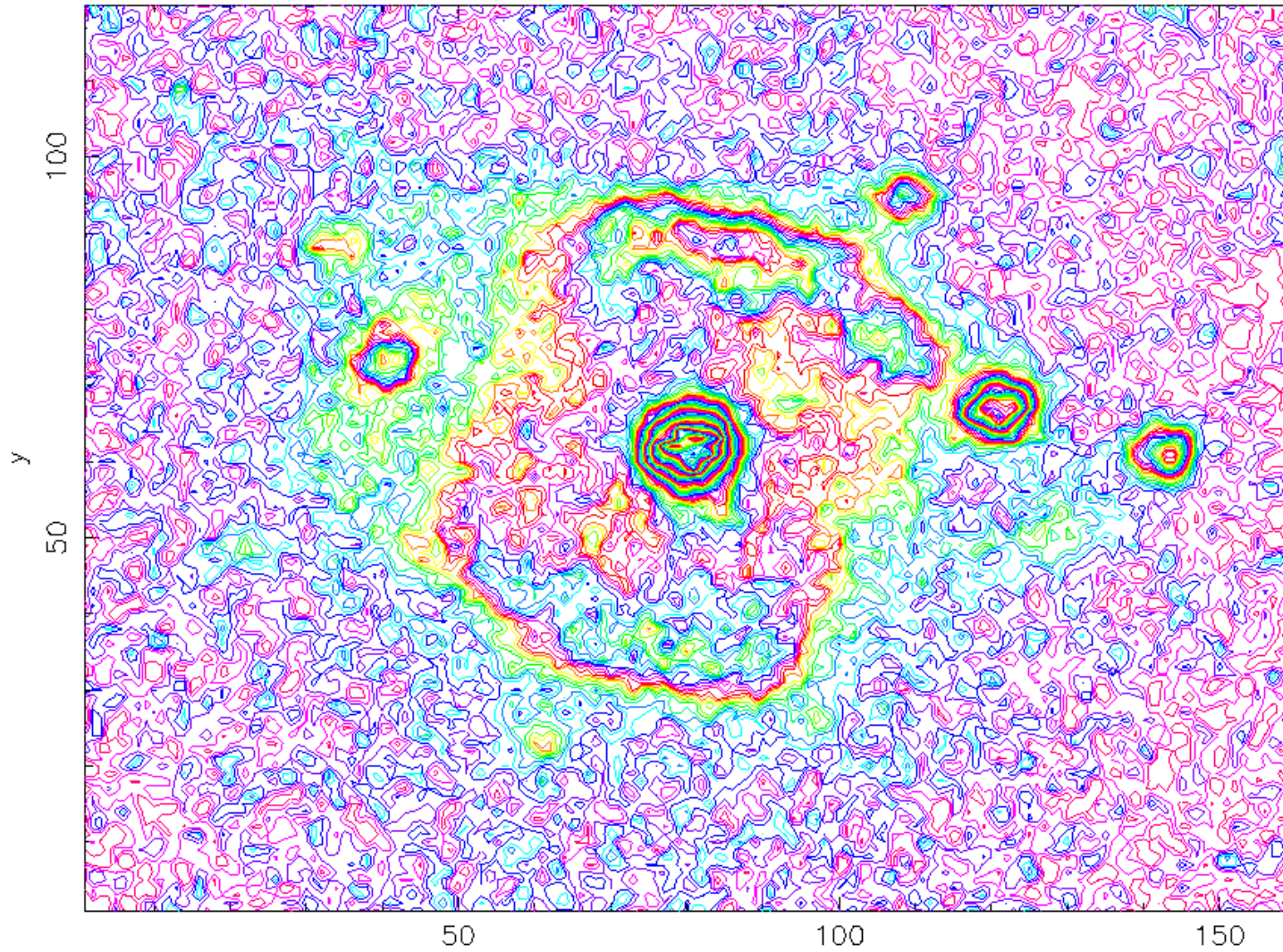
Contraste et Mesures

- Changement des contrastes
 - Le contraste local est lié à la relation liant les valeurs mesurées à la luminosité de l'écran : *Look-up Table*
 - Autant de LUT que de couleurs
 - Exemples
- Mesures :
 - Positions, valeurs de pixels
 - Contours, domaines → Utilisation de la souris

Modification des contrastes



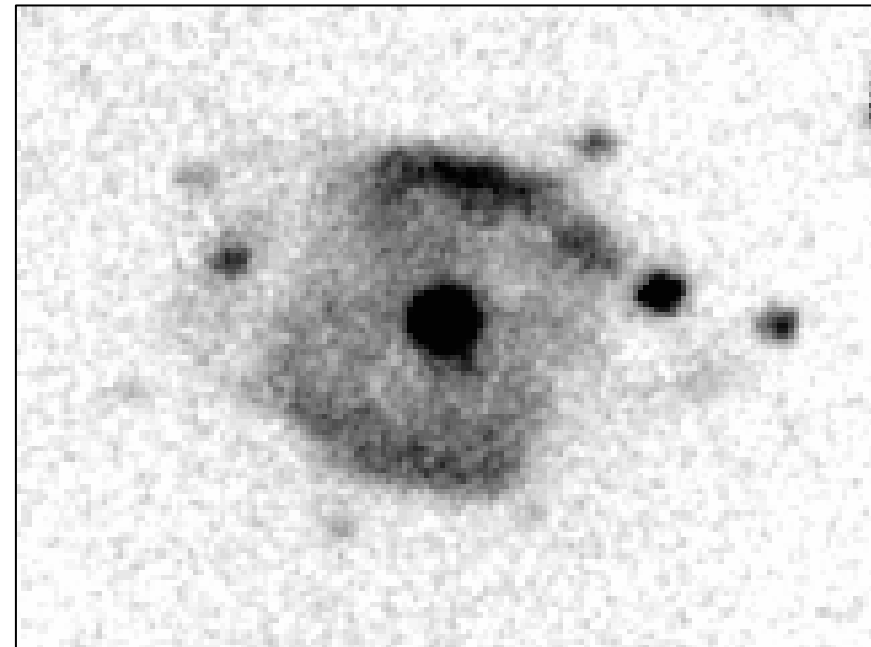
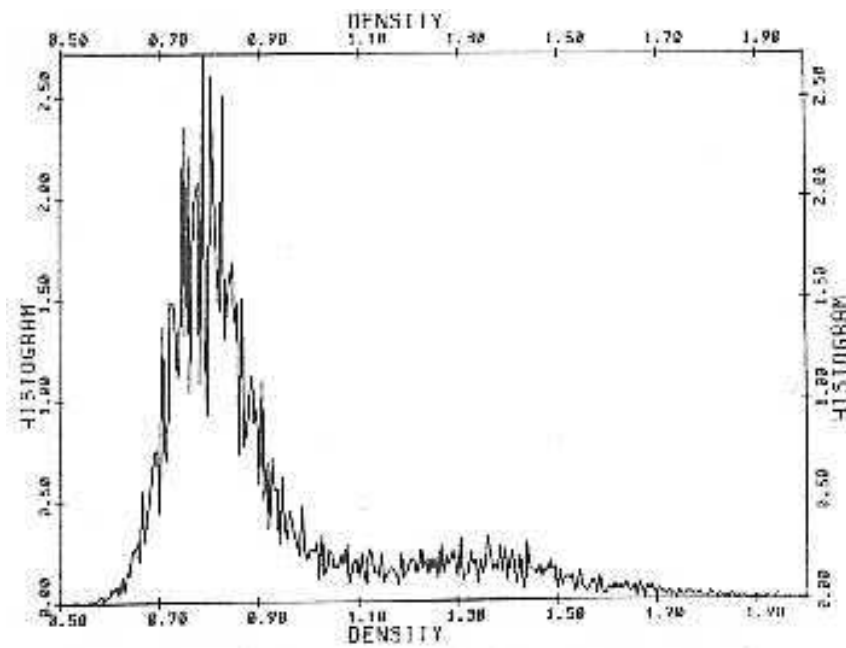
Isophotes



Analyse Globale

- Objectif : caractériser globalement
 - Image +/- posée
 - Image +/- résolue
 - Image d'une zone dense
 - Image d'un galaxie ?
- Statistiques sur l'image
 - Paramètres élémentaires
 - Histogramme et paramètres dérivés
- Statistiques sur des fonctions de l'image
 - Laplacien
 - Gradients

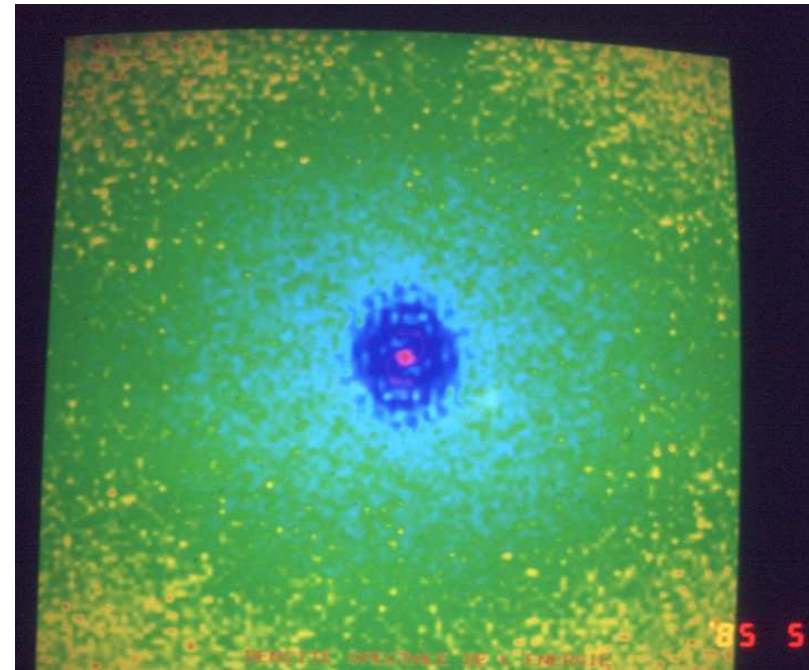
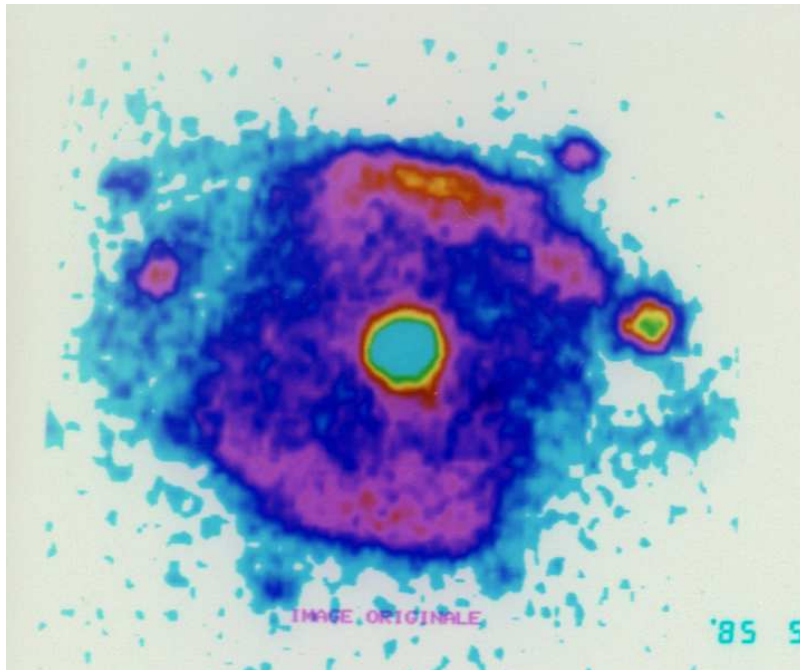
Histogramme



Analyse de Fourier

- Densité Spectrale de l'énergie.
 - Définition et estimation
- Analyse de la densité spectrale
 - Fréquence de coupure
 - Loi de puissance
 - Pics : échelle particulière
 - Orientation privilégiée
- La fonction d'autocorrélation.
 - Échelle de corrélation

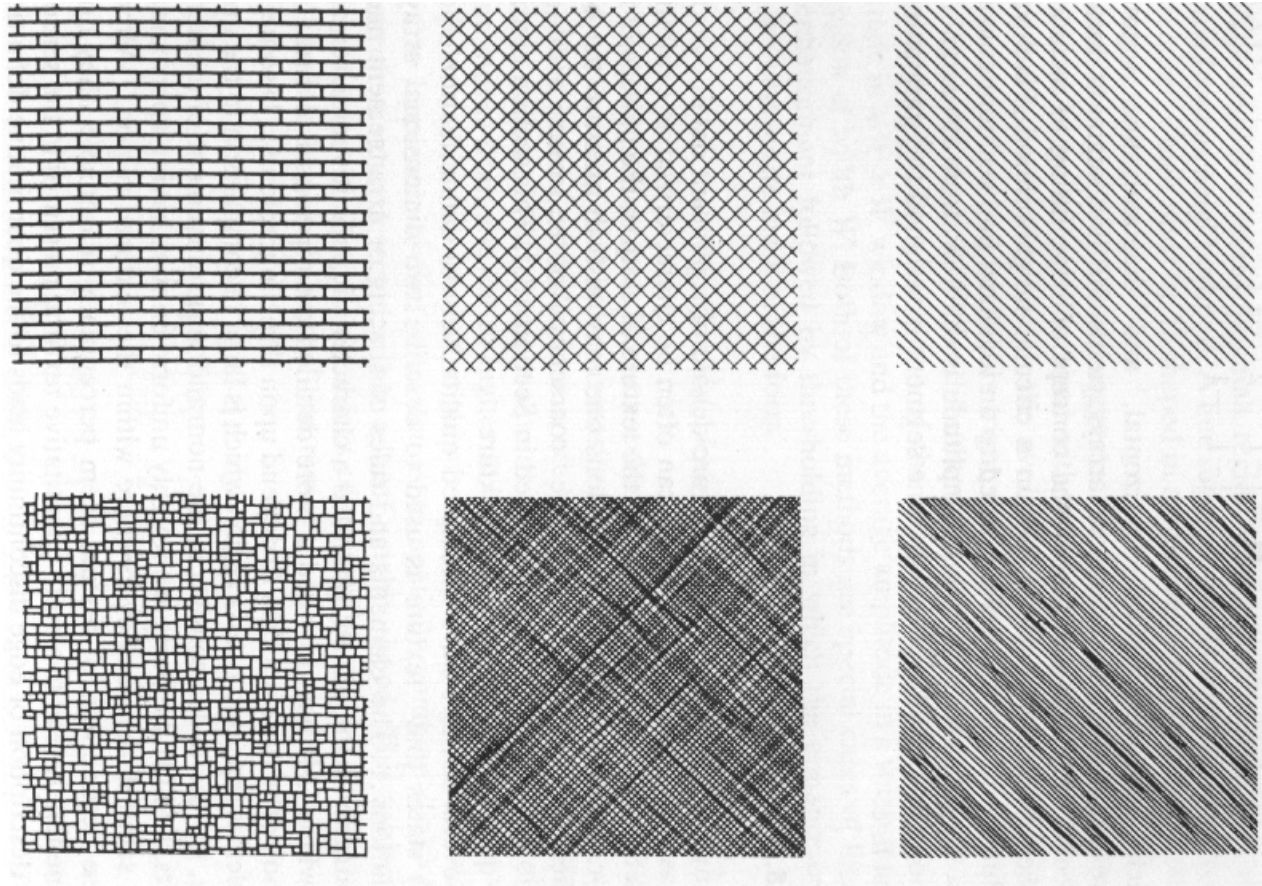
Densité spectrale



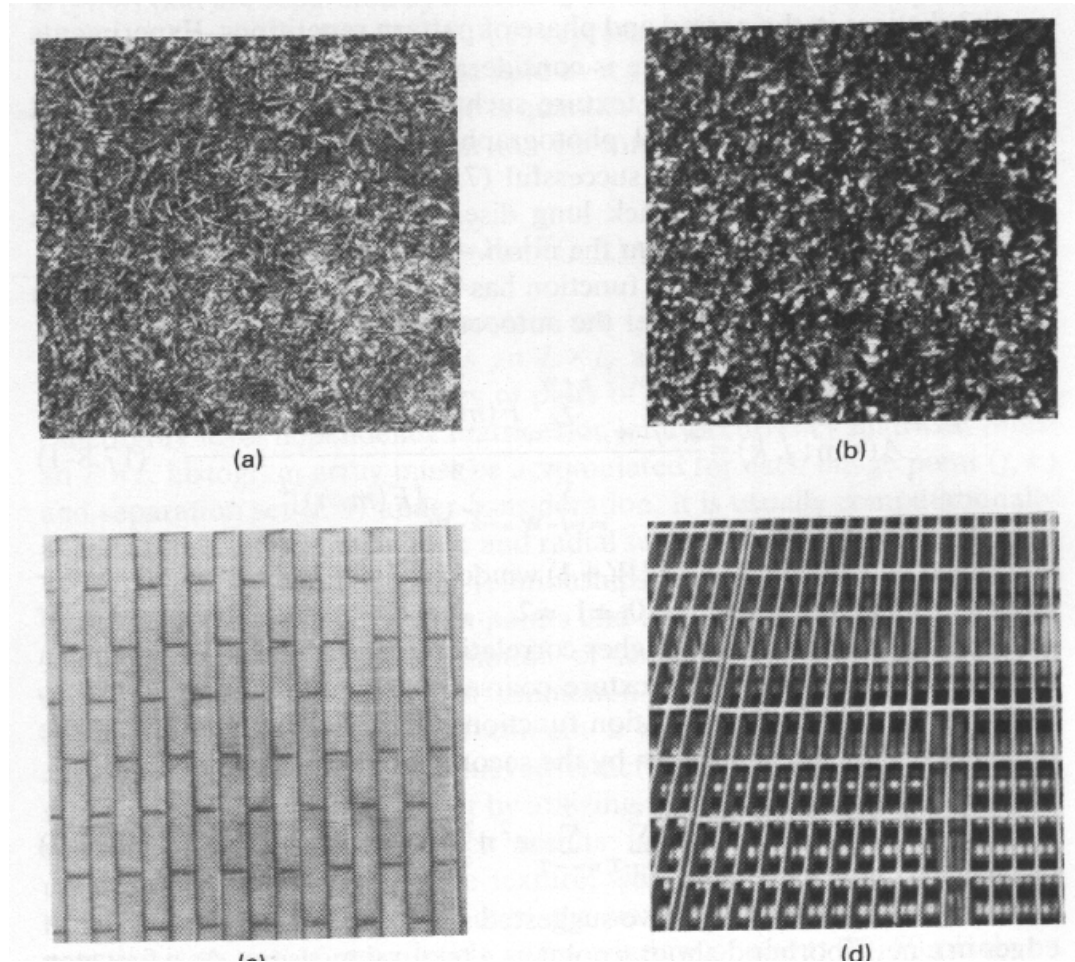
Texture

- Notion de texture
 - Existence de motifs réguliers
 - Motifs statistiques
- Caractérisation de la texture
 - Statistiques sur l'image
 - Analyse de Fourier
 - Matrices de co-occurrence :
 - exploitation des informations de deux pixels
 - Modélisation par champ de Markov
 - Concept plus général
 - Méthodes syntaxiques

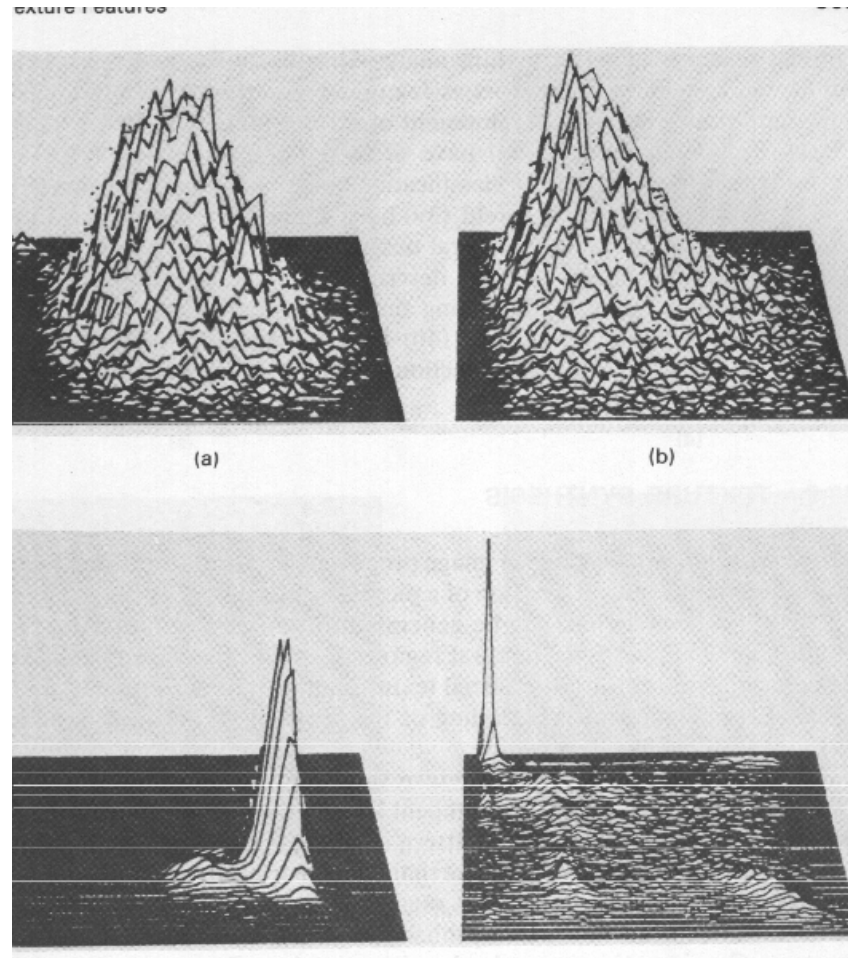
Exemples de textures artificielles



Exemples de textures naturelles



Un Outil: la matrice de co-occurrence



3^{ième} Leçon

Analyse paramétrique

Extraction des paramètres principaux

Exercice sur l'analyse statistique

Analyse paramétrique

- Modèles déterministes
 - Peut-on modéliser une image
 - Modèle statistique / déterministe
- Origine physique
 - Somme de profils d'étoiles

$$I(k,l) = f(k,l) + \sum_i a_i p(k - x_i, l - y_i)$$

- Paramétrisation d'une galaxie

$$I(k,l) = f(k,l) + c_1 P_1(k - x_1, l - y_1, a_1, b_1, \theta_1) + c_2 P_2(k - x_2, l - y_2, a_2, b_2, \theta_2)$$

Estimation des paramètres

- Estimation statistique > modèle du bruit
 - Bruit Gaussien : moindres carrés
 - Bruit Poisson : Max de vraisemblance
 - Autres bruits : Max de vraisemblance
- Equations normales (cas normal)

$$\sum_{k,l} \frac{\partial f(k,l)}{\partial a_i} \frac{[I(k,l) - f(k,l)]}{\sigma^2(k,l)} = 0$$

- Equations normales (cas Poisson)

$$\sum_{k,l} \frac{\partial f(k,l)}{\partial a_i} \frac{[I(k,l) - f(k,l)]}{f(k,l)} = 0$$

Validité du modèle

- Résidus individuels

$$r(k, l) = I(k, l) - f(k, l)$$

- Pixels aberrants
- Choix des pixels
- Influence des structures voisines
- Itérations
- Test de vraisemblance

Quelques modèles courants

- PSF

$$f(k, l) = ap(k - x_0, l - y_0) + b$$

- Linéarité pour a et b
- Difficulté pour x_0 et y_0

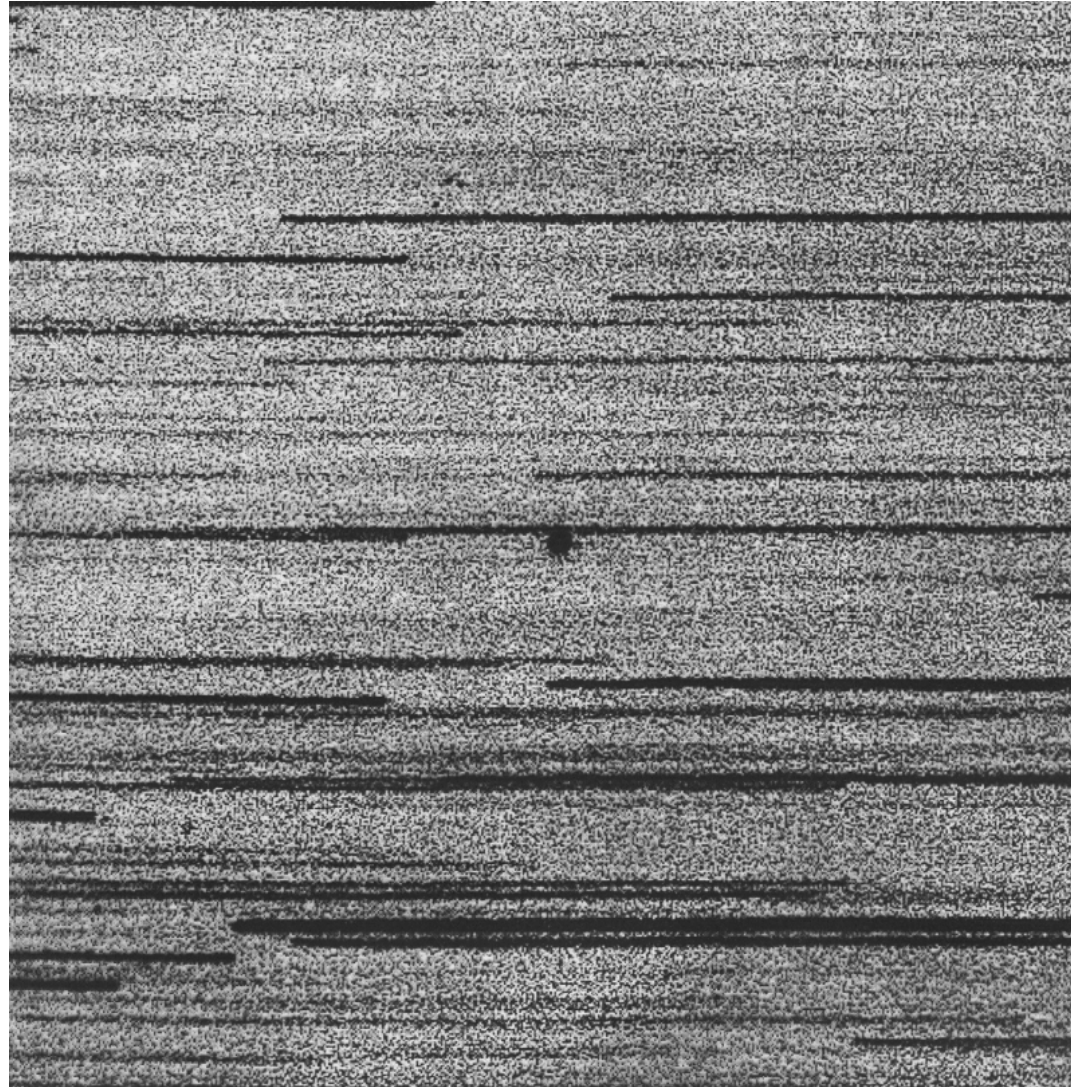
- Tache gaussienne

$$f(k, l) = ag(k - x_0, l - y_0, \alpha, \beta, \theta) + b$$

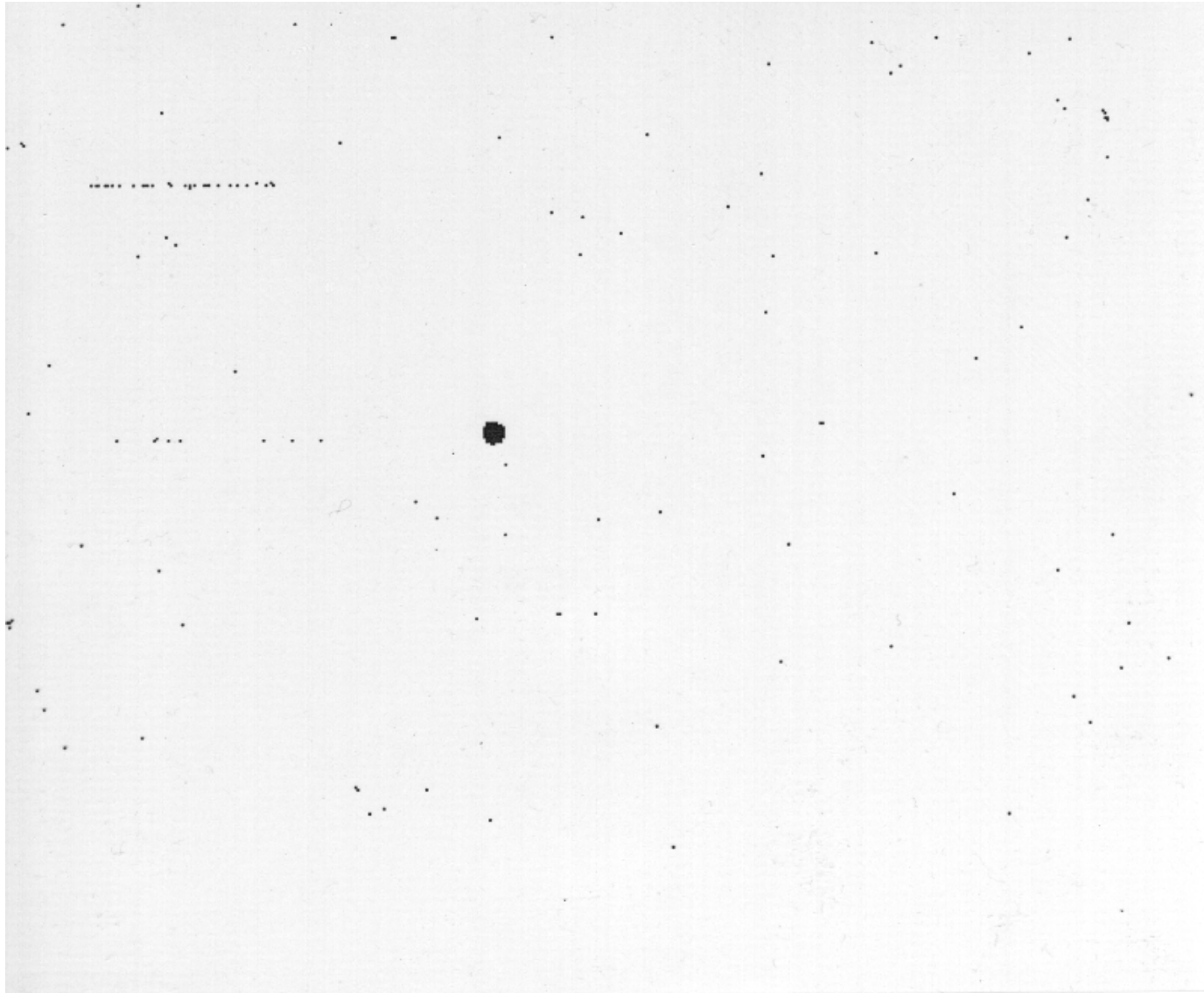
- Difficulté pour α , β et θ

- Expression polynomiale

Détection des débris spatiaux



Résidus après nettoyage



Mesure du fond

- Fond dans une image astronomique
 - Lentement variable → échelle
 - Les objets s'ajoutent au fond
 - valeurs faibles
 - Cas des nuages absorbants
 - Domine en population
- Modélisation polynomiale (très lourd)
- Estimation à partir des histogrammes locaux

Mesure de la position

- Par modélisation
 - Trop complexe
- Photocentre
 - Choix des pixels
 - Effet du fond
 - Pondération
- Corrélation avec la PSF
 - Optimalité
 - Rapidité
- Symétrie

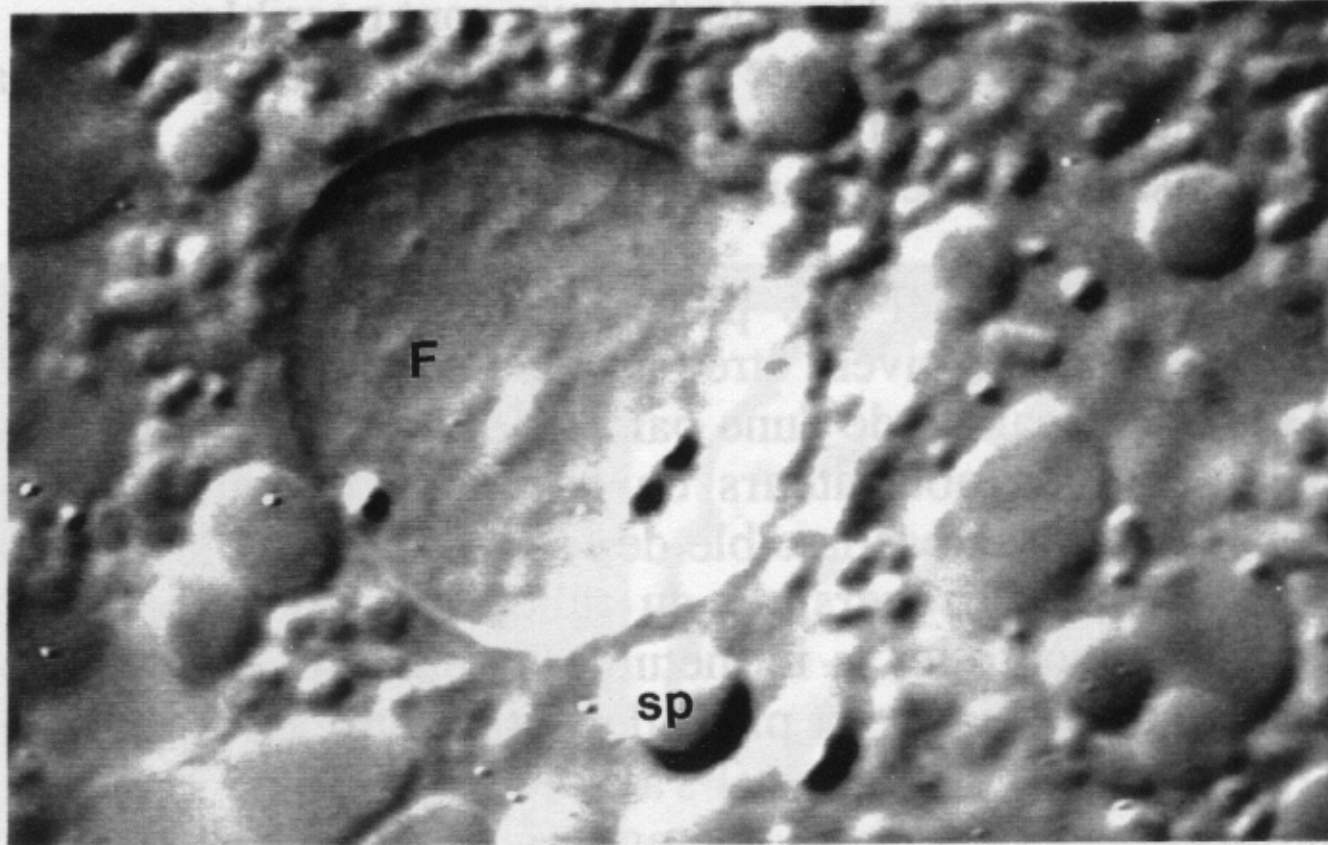
Mesure des flux

- Intégration dans un domaine
 - Domaine fixe
 - Domaine défini par une isophote
 - Domaine défini par des bords
- Par modélisation
- Par corrélation
- Profil radial et flux intégré

Contours des objets

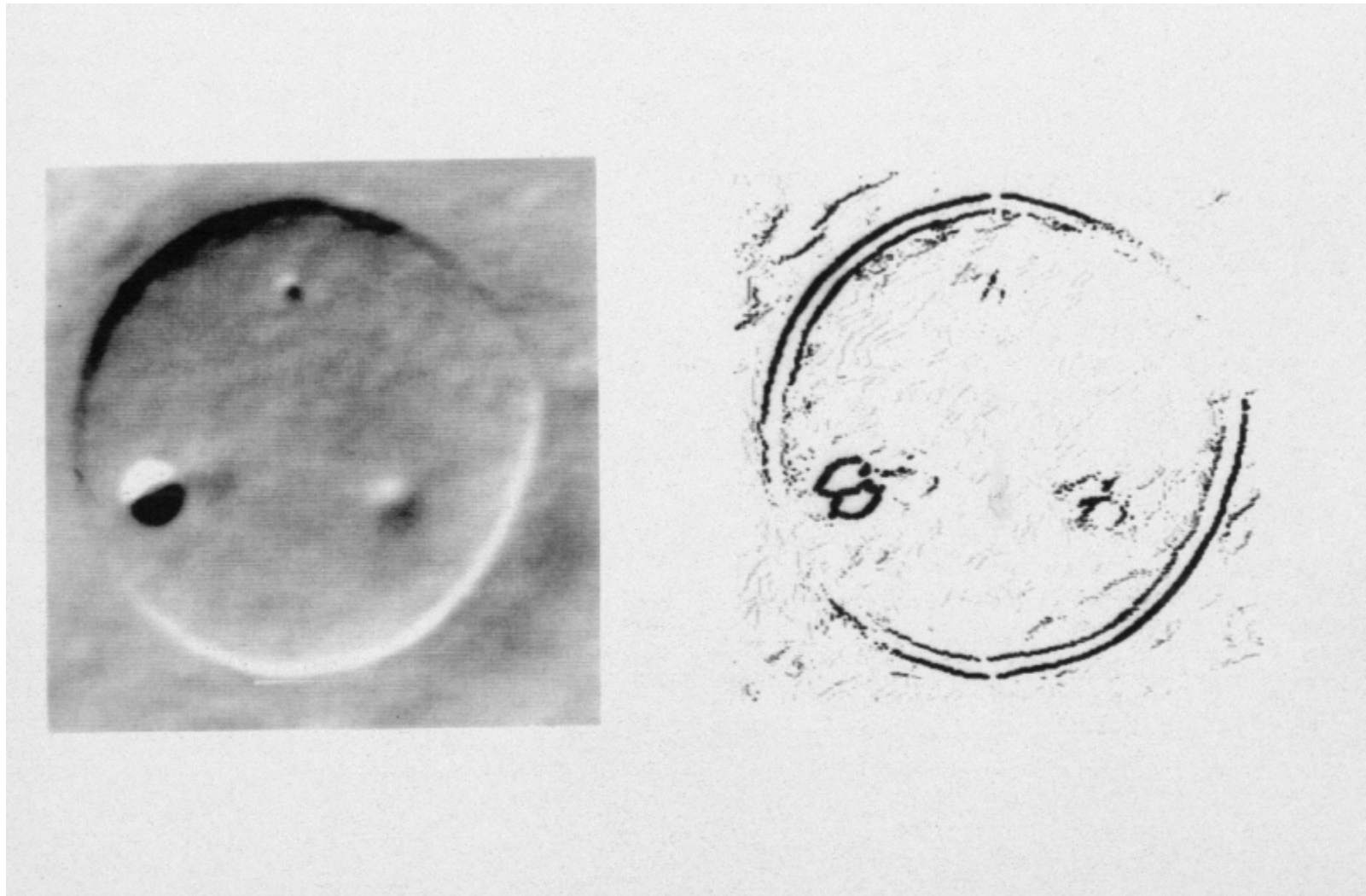
- Astres structures diffuses
- Contours standards : isophotes
- Opérateurs de bords (Sobel)
- Contours actifs
 - Minimisation d'une énergie
- Ligne de laplacien nul
 - Facilité
- Ligne du gradient maximum
 - 1 domaine, 1 max
- Les lignes de vallée
 - 1 domaine, 1 max

Exemple d'un organe cellulaire

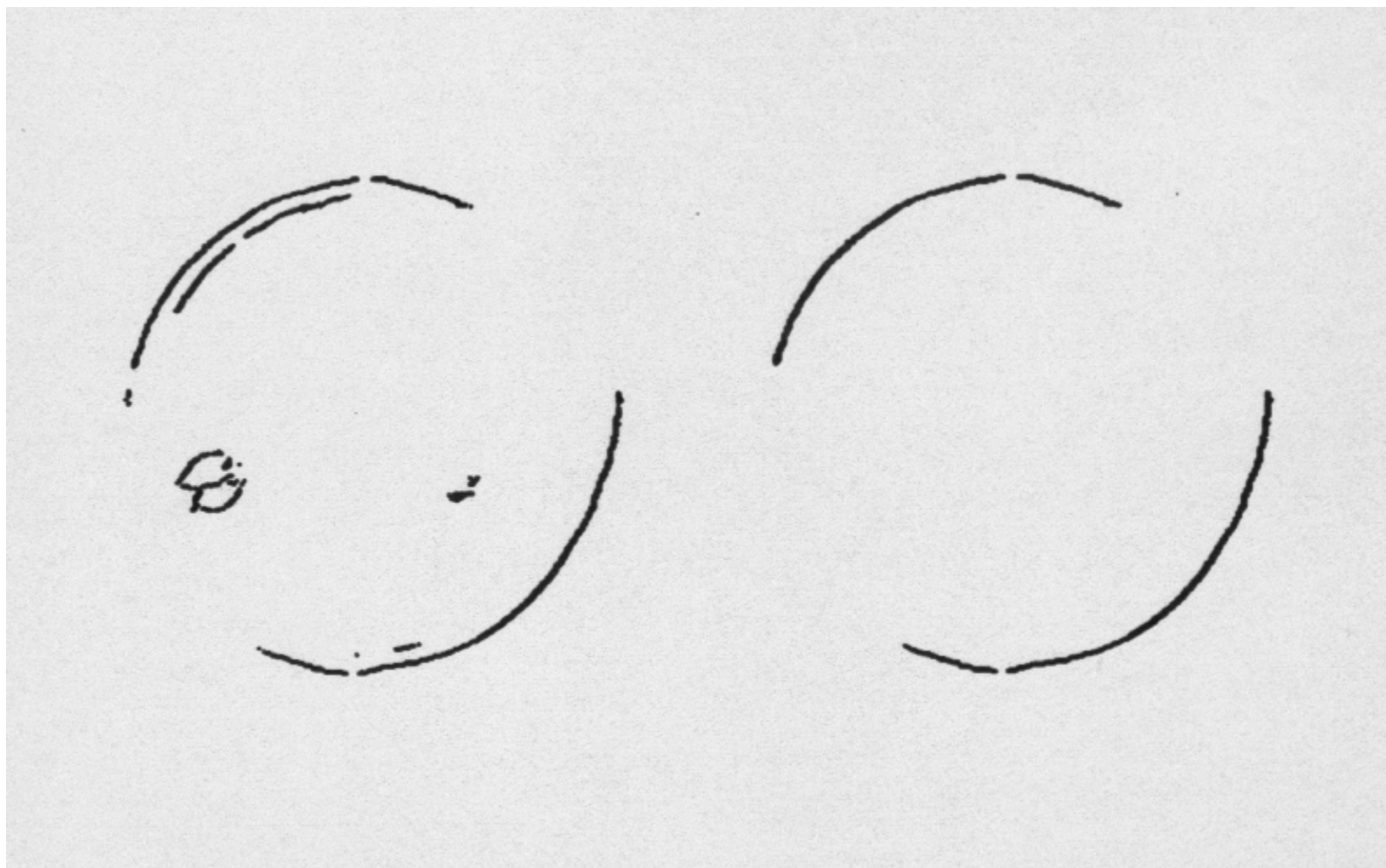


**Image (DIC) du pronucléus femelle (F),
proche d'un pronucléus mâle (Sp).**

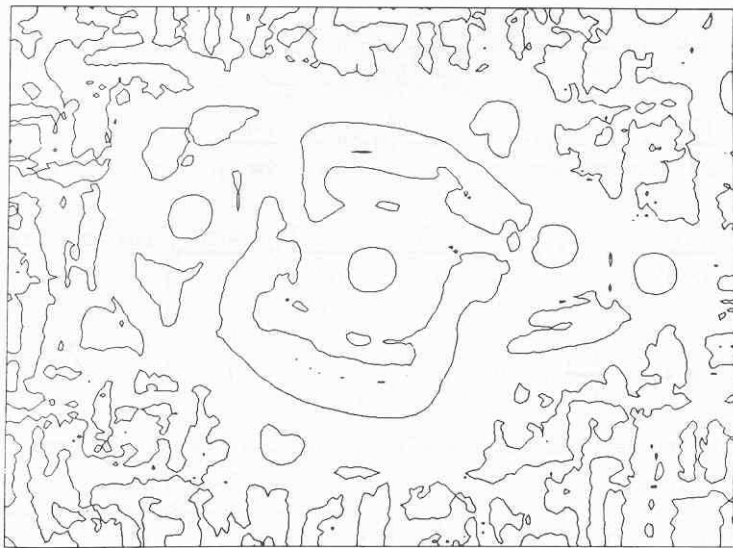
Maximum local du gradient



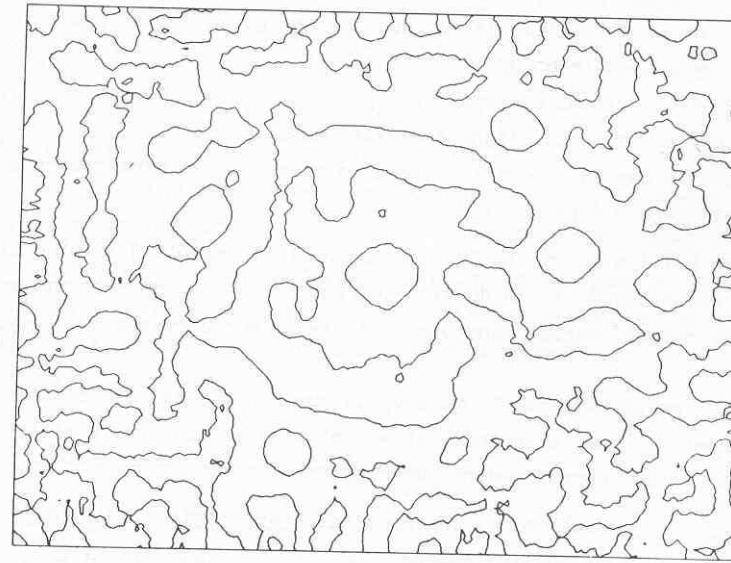
Binarisation et nettoyage



Exemple de contours

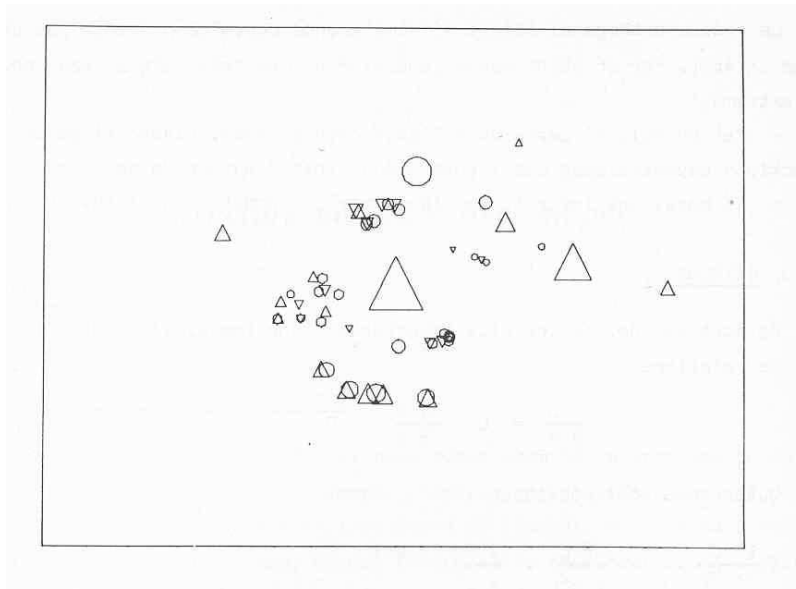


Lignes de gradient maximum

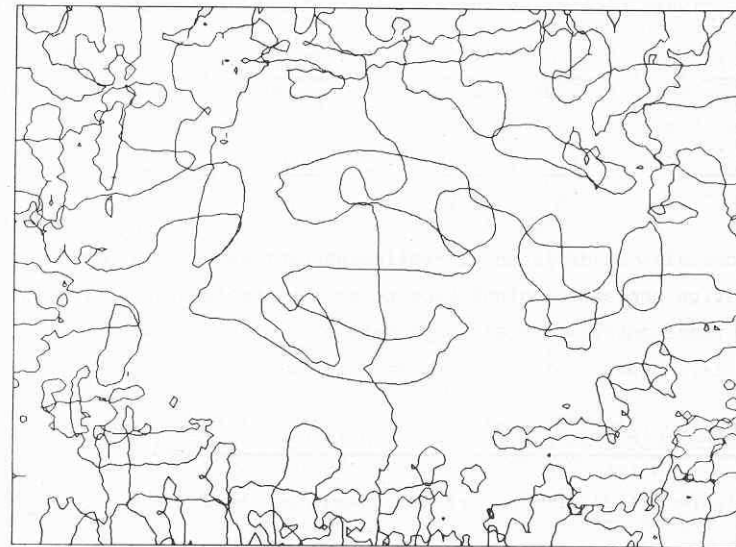


Lignes de laplacien

Extrema et lignes de vallées



Maxima, minima et cols



Lignes de vallée

4^{ième} leçon

Segmentation des images
astronomiques
Analyse morphologique
Exercice sur la modélisation

Détection

Identification de Sources

Segmentation des Images

- Objectif:
 - Décomposer une image en régions connexes
 - À chaque région on alloue une étiquette
 - Les régions sont délimités par des contours
- Algorithmes d'étiquetage
 - Croissance de domaine
 - Voisin du voisin est un voisin
- Exemple

Extraction de primitives

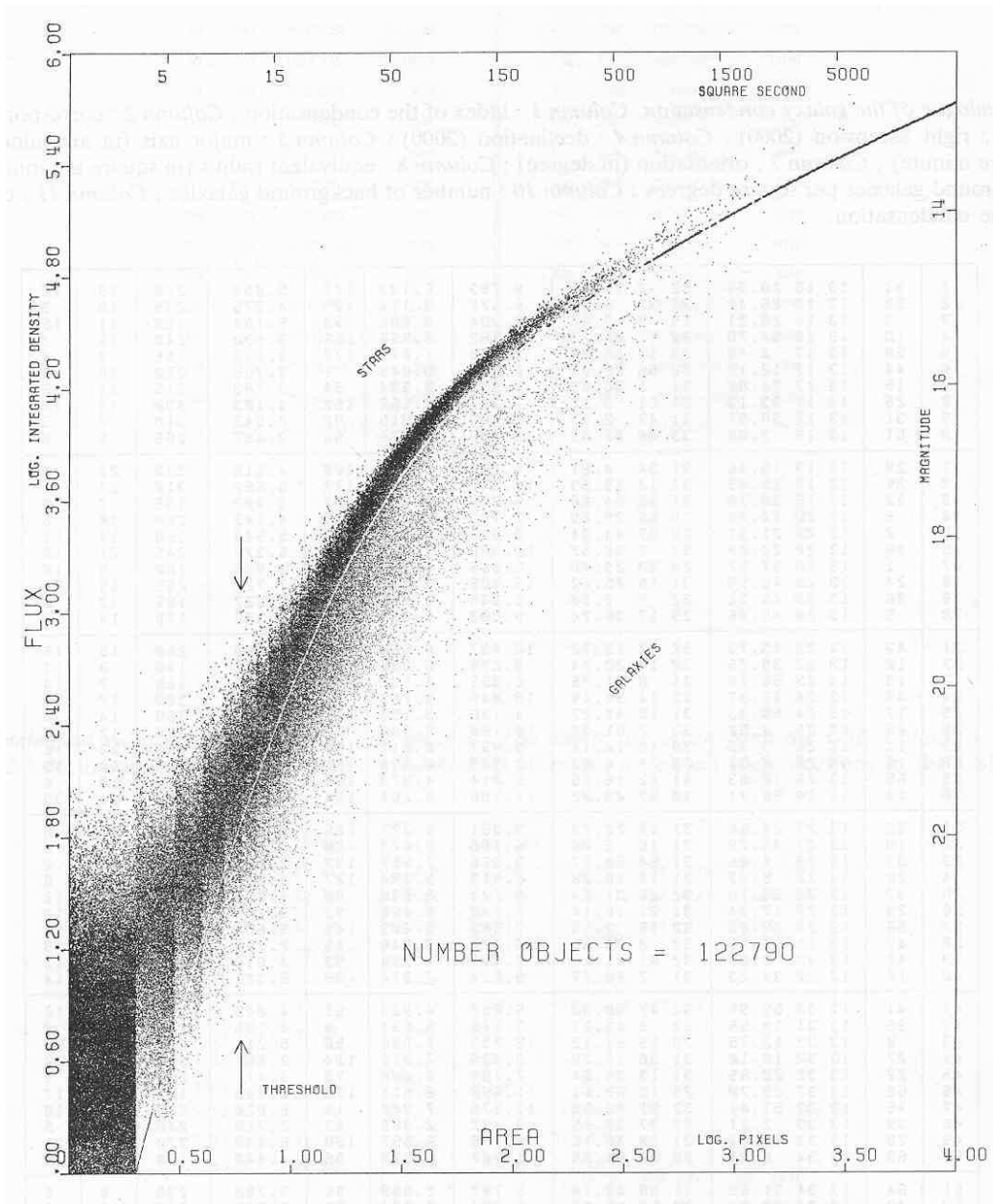
- Moments des domaines
 - Évaluation en temps réel des moments bruts
 - Pondération
 - Moments de fonctions dérivées
- Extrema
 - Évaluation en temps réel
- Paramètres associés aux contours
- Inclusion

Réduction des paramètres

- Dérivés des moments
 - Position pondérée ou non
 - Flux
 - Aire
- Approximation elliptique
 - Échelle, allongement, orientation
- Concentration
- Rectangle d'encadrement
- Circularité

Classification des domaines

- Classification bayésienne
 - On admet qu'il y a 2, 3, .. Classes préalablement identifiées
 - L'attribution de la classe dépend des population et des dispersions (th. de Bayes)
- Analyse des nuées
 - Décomposition automatique en groupes
 - Nombreux algorithmes
- Réseaux de neurones
 - Apprentissage
- Arbres de décision



Classification Bayésienne

Reconnaissance des objets

- Existe-t-il une biunivocité entre les domaines et les objets?
- Les paramètres des domaines sont-ils caractéristiques des objets à reconnaître?
- Mécanisme très lourd
- La segmentation ne conduit qu'à séparer entre des classes préalablement identifiées
- Il faut introduire de l'expertise → IA

Corrélation croisée

- Corrélation entre deux images

$$r = \frac{\int f(x, y)ds \int g(x, y)ds}{\sqrt{\int f^2(x, y)ds} \sqrt{\int g^2(x, y)ds}}$$

$$|r| \leq 1$$

$$|r| = 1 \quad f(x, y) = \lambda g(x, y)$$

- Pour reconnaître il suffit de corrélérer l'image avec un alphabet d'objets
- Optimal pour un nombre délimité d'objets
- Lié à une modélisation

5^{ième} leçon

Morphologie mathématique

Analyse multibande

Exercice sur l'analyse morphologique

La Morphologie Mathématique

- Obtenir sur les régions un ensemble complet de mesures
- Effectuer des transformations pour faire apparaître tous les éléments constitutifs des régions
- Méthode : transformation d'ensembles

Morphologie binaire

- Élément structurant
 - Définit un voisinage
- Dilatation
 - Adjonction des voisins de tous les points de l'ensemble
- Érosion
 - Dilatation de l'ensemble complémentaire
- Ouverture, Fermeture
 - Ouverture : érosion suivie d'une dilatation
 - Fermeture : dilatation suivie d'une érosion

Morphologie binaire

		1		1	1	
	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1		
		1	1			

A

	1	
1	⊕	1
	1	

B

		1		1		
		1	1	1	1	
		1	1	1		
		1	1			

$\mathcal{E}A$

		1		1	1		
	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1			
		1	1				

$\mathcal{D}A$

Ouverture et Fermeture

		1		1	1		
	1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1			
		1	1				

A

		1	
1	⊕	1	
		1	

B

		1		1			
	1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1		
	1	1	1	1			
		1	1				

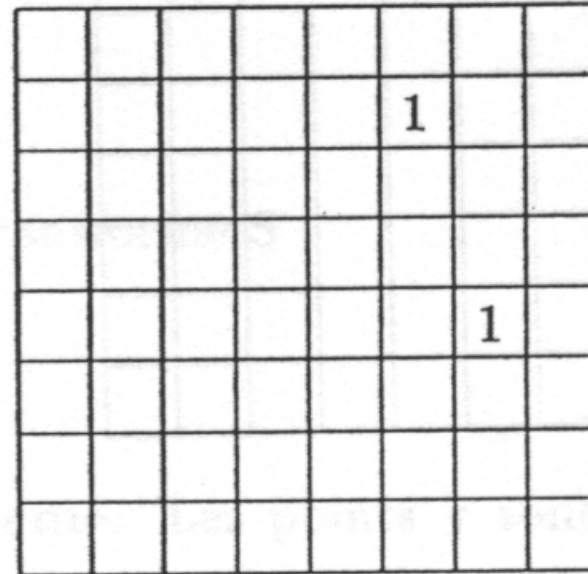
$\mathcal{O}A$

		1		1	1		
	1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1			
		1	1				

$\mathcal{F}A$

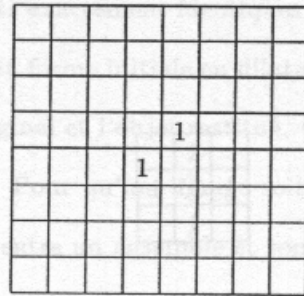
Squelette

- L'ouverture n'est pas une opération idempotente
- Les pixels éliminés correspondent à des zones de faible largeur
- Elles font partie du squelette du domaine

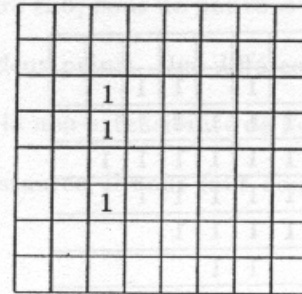


$$A - \mathcal{O}A$$

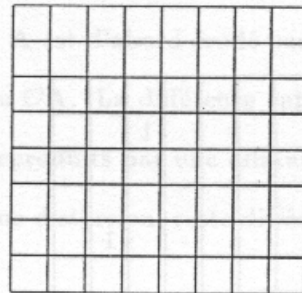
Itérations



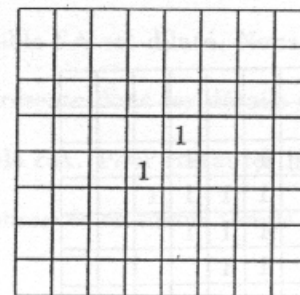
$$\varepsilon^2 A$$



$$\varepsilon A - \mathcal{O}(\varepsilon A)$$



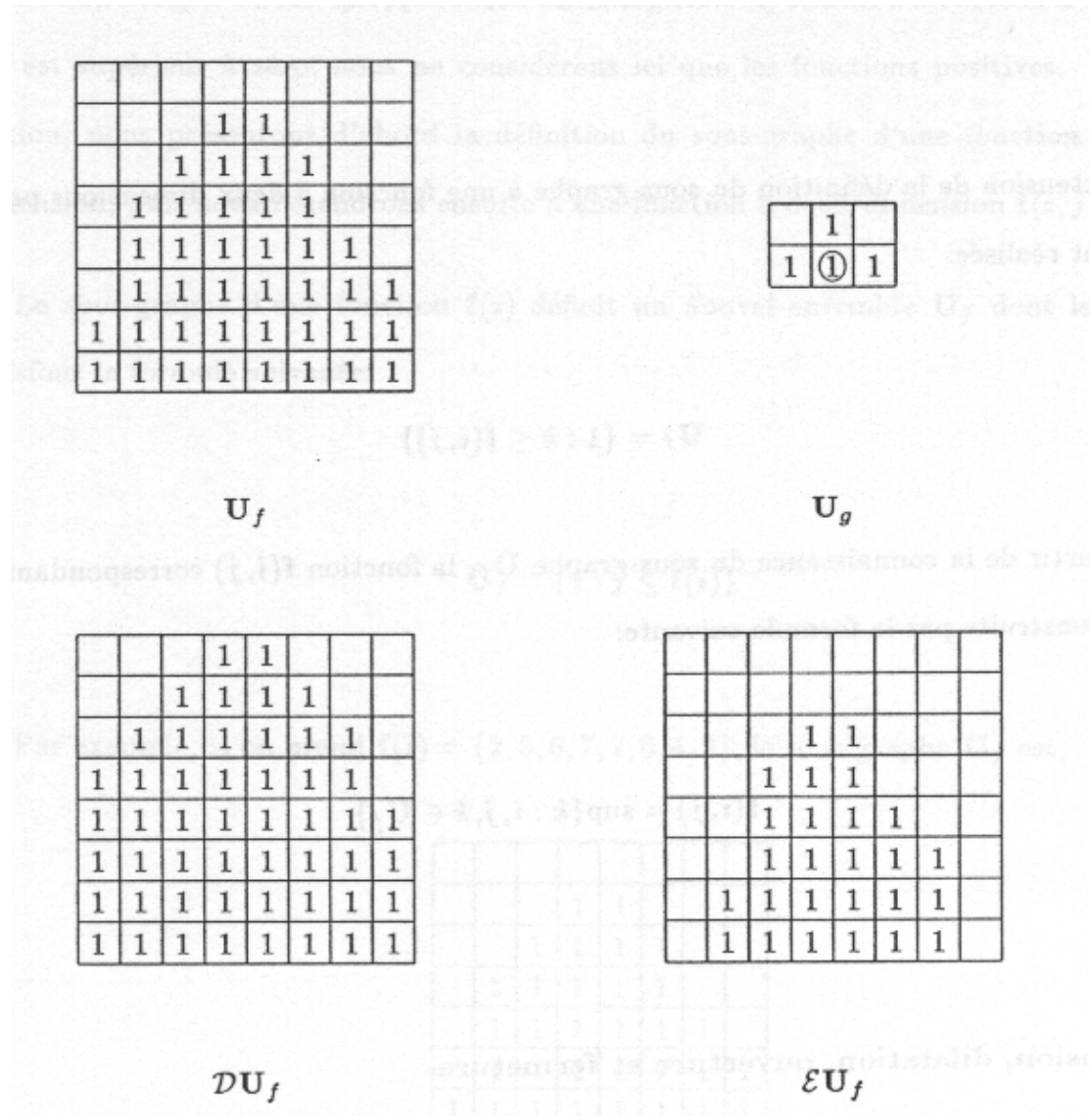
$$\varepsilon^3 A$$



$$\varepsilon^2 A - \mathcal{O}(\varepsilon^2 A)$$

Morphologie à Niveaux de Gris

- On applique la morphologie binaire sur le graphe de la fonction
- L'élément structurant peut comporter ou non une dimension en valeur de pixel



Cas à deux dimensions

		3	4	5			
	3	4	5	4	4		
	4	5	13	6	5	4	
	4	6	6	5	5	4	
	6	16	5	4	4		
		6	4				

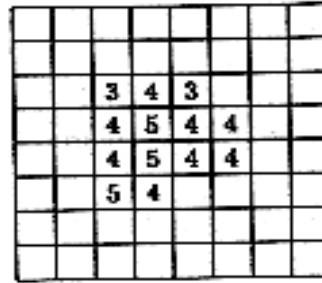
$f(i, j)$

		1	
1	②	1	
		1	

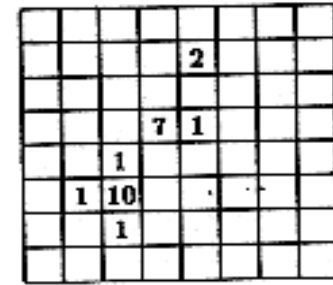
$g(i, j)$

Squelette à niveaux de gris

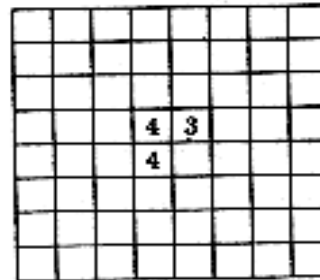
- Le squelette à niveaux de gris peut être considéré comme des germes à partir desquels l'image est construite



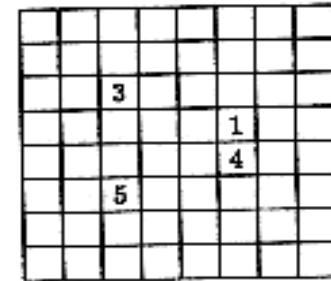
ϵf



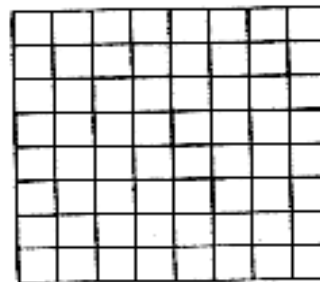
$f - O(f)$



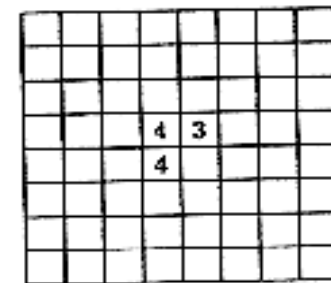
$\epsilon^2 f$



$\epsilon f - O(\epsilon f)$



$\epsilon^3 f$



$\epsilon^3 f - O(\epsilon^3 f)$

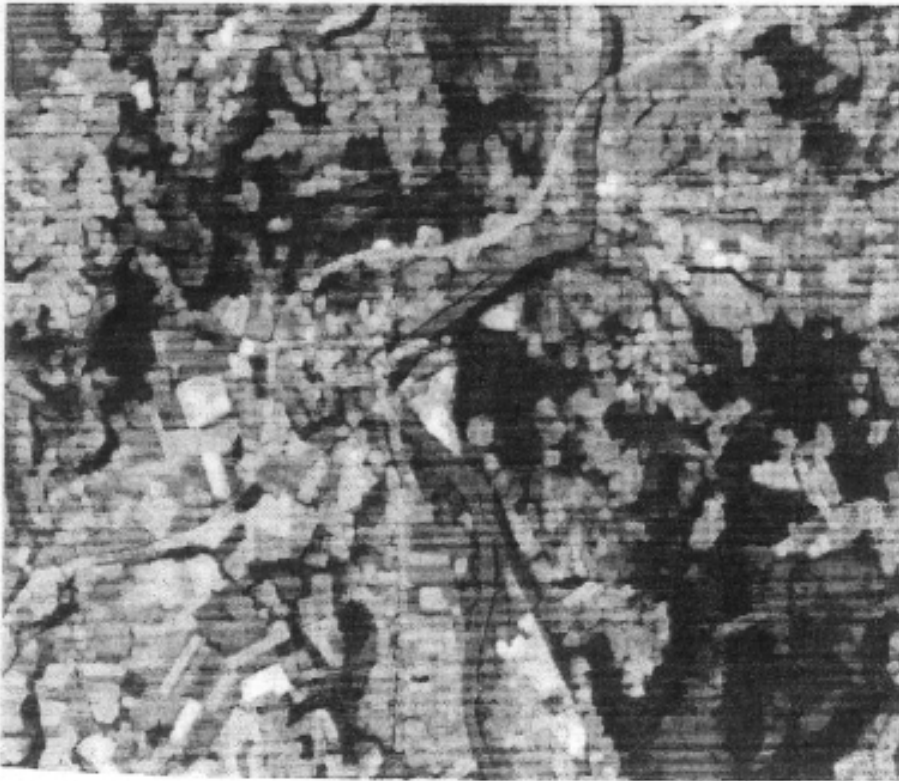
Application en télédétection

extrait d'une image panchromatique SPOT



Ouverture / Fermeture

résultat de l'ouverture

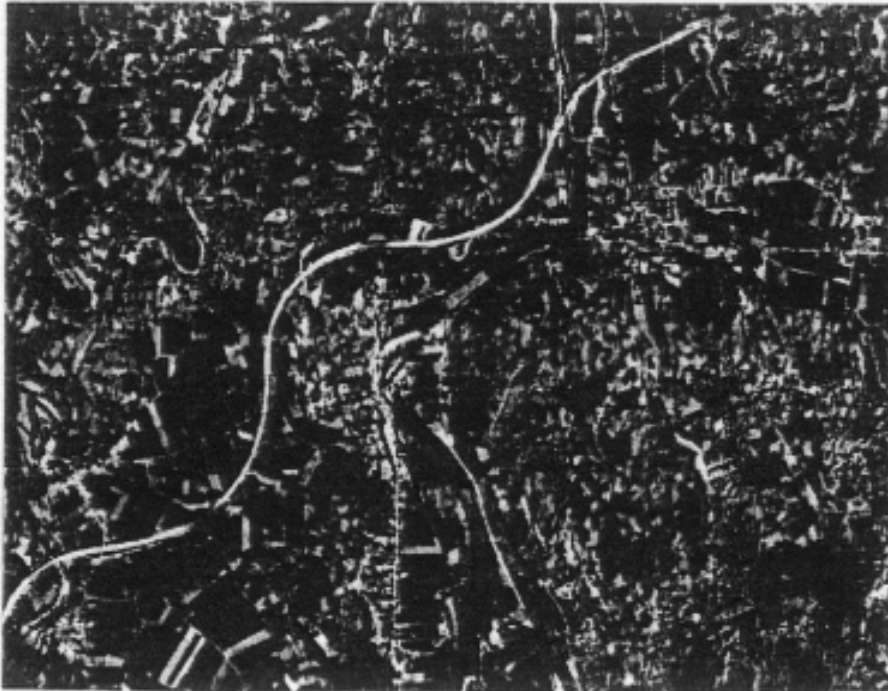


résultat de la fermeture

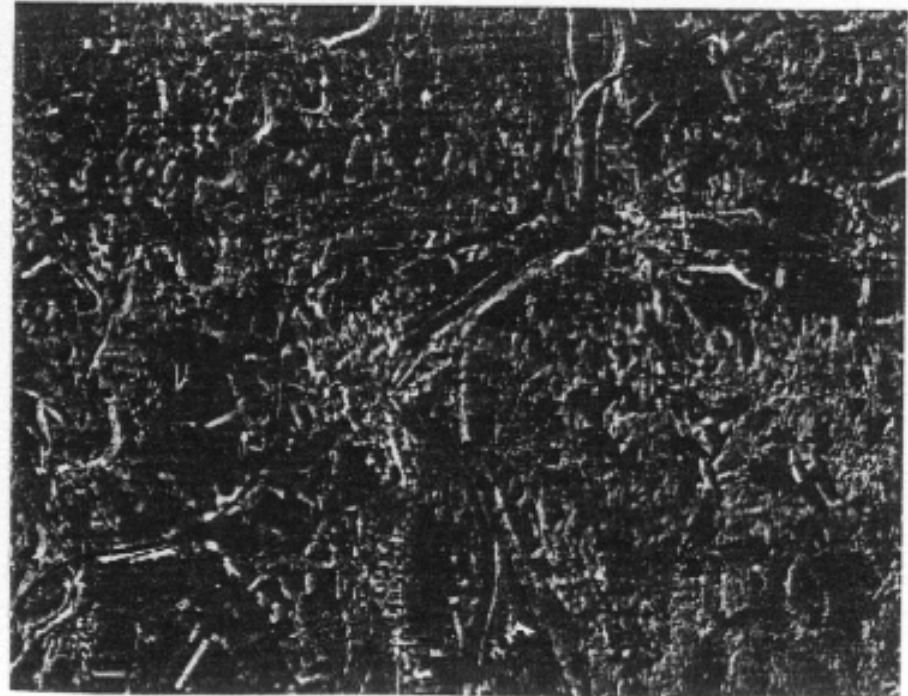


Transformation Chapeau Haut de Forme

résultat du chapeau haut de forme
par ouverture



résultat du chapeau haut de forme
par fermeture



Analyse Multibandes (1)

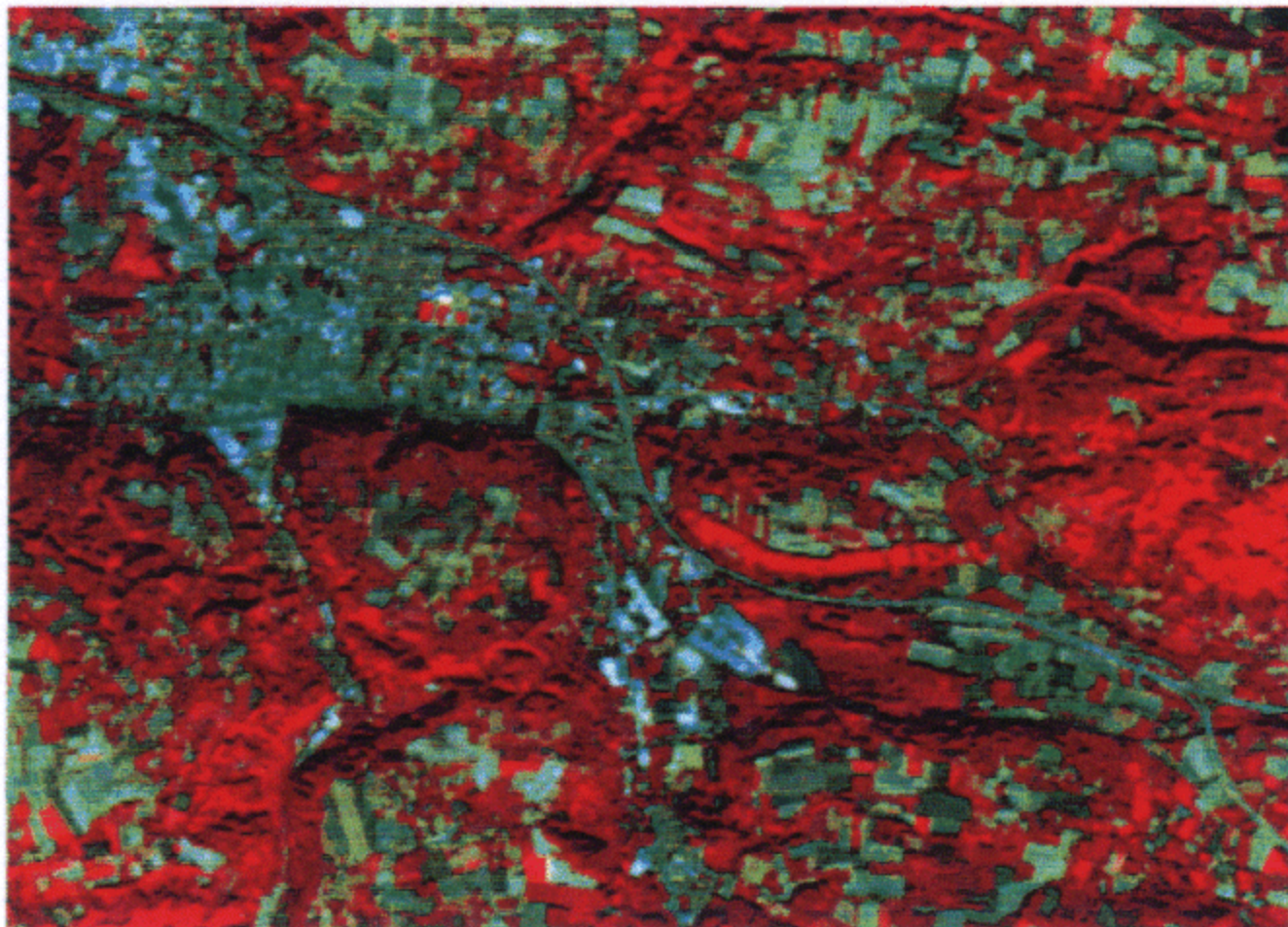
- Buts
 - Comparer les informations correspondant au même pixel de l'image
 - Classer les pixels d'après leurs valeurs dans les différentes images
 - Détecter des pixels particuliers
- Prétraitements
 - Mise en correspondance géométrique
 - Mise en correspondance radiométrique
 - Mise en correspondance en résolution

Analyse Multibandes (2)

- Décomposition en boîtes
 - D'après la répartition des valeurs des pixels
- Analyse des nuées
 - Algorithme de groupement
 - K-Means
- Combinaison des mesures
 - ACP → Expansion de Karhunen-Loeve
 - Analyse en Composantes Indépendantes

Analyse Multispectrale

Combinaison colorée à partir des 3 canaux XS rééchantillonnés à 10 mètres



Classification de l'urbain par analyse spectrale
(on a incrusté le masque de l'urbain dans la combinaison colorée)

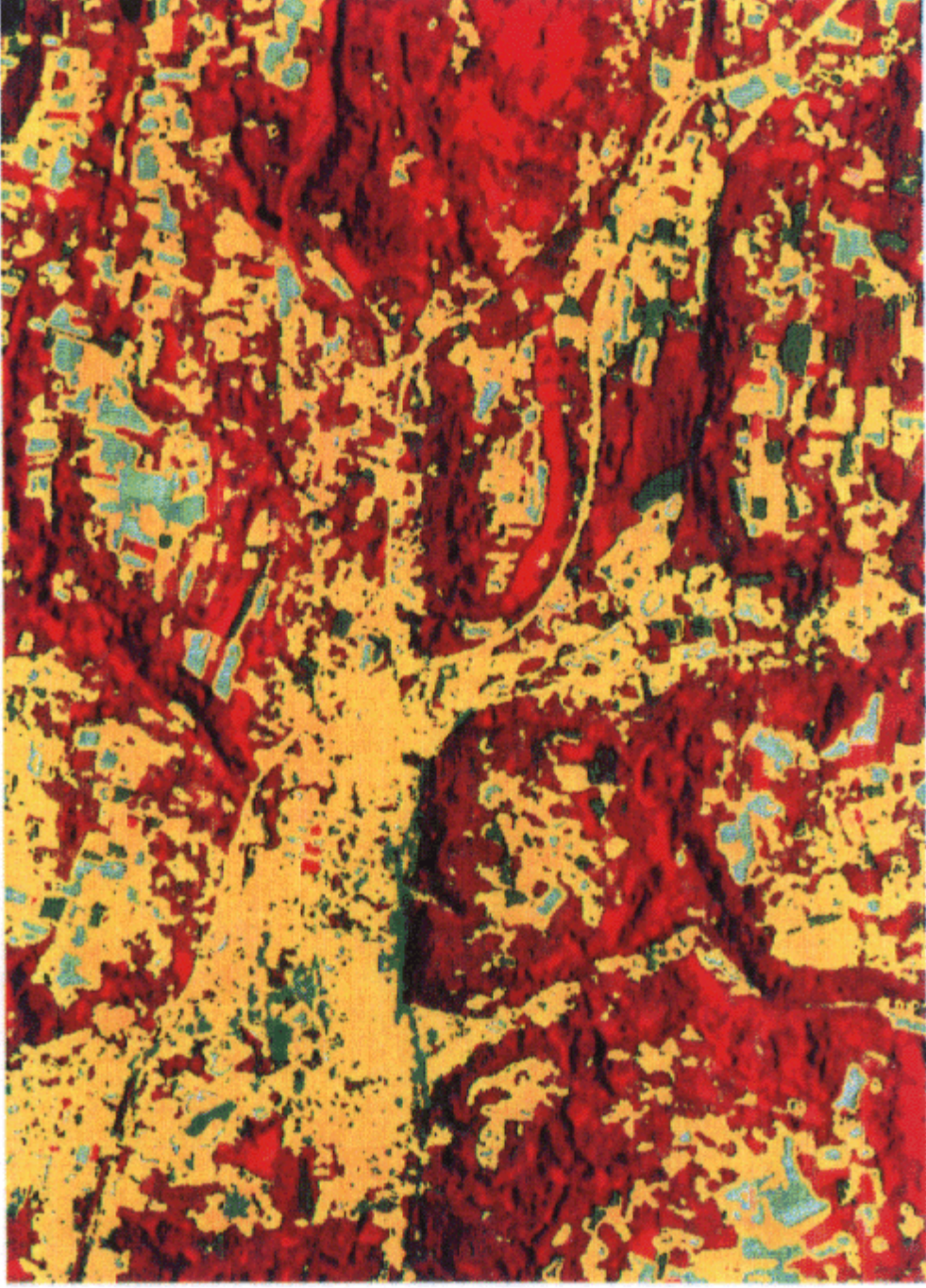


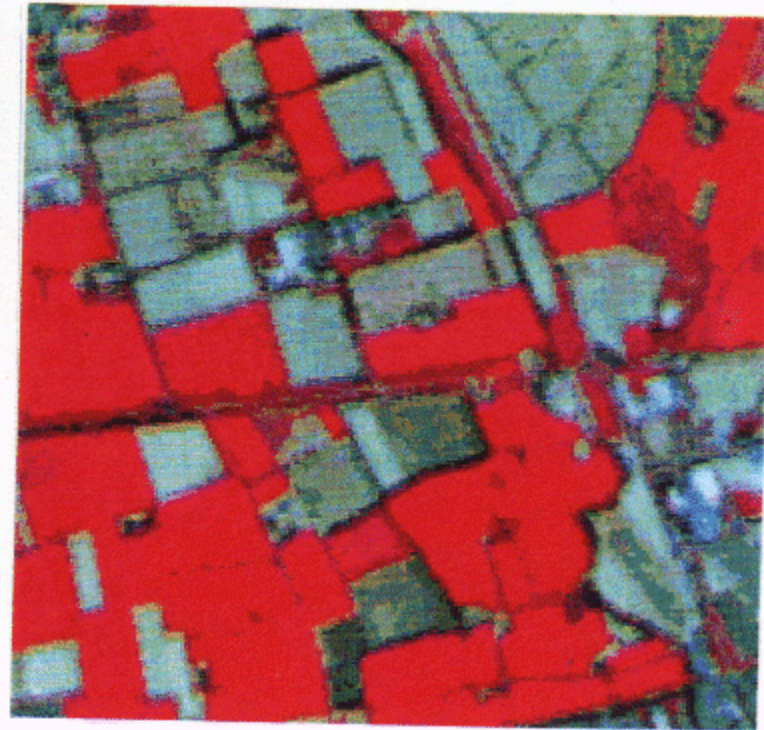
foto que tout l'urbain est enroulé dans la zone masquée mais que

Coopération Morphologie / Multispectrale

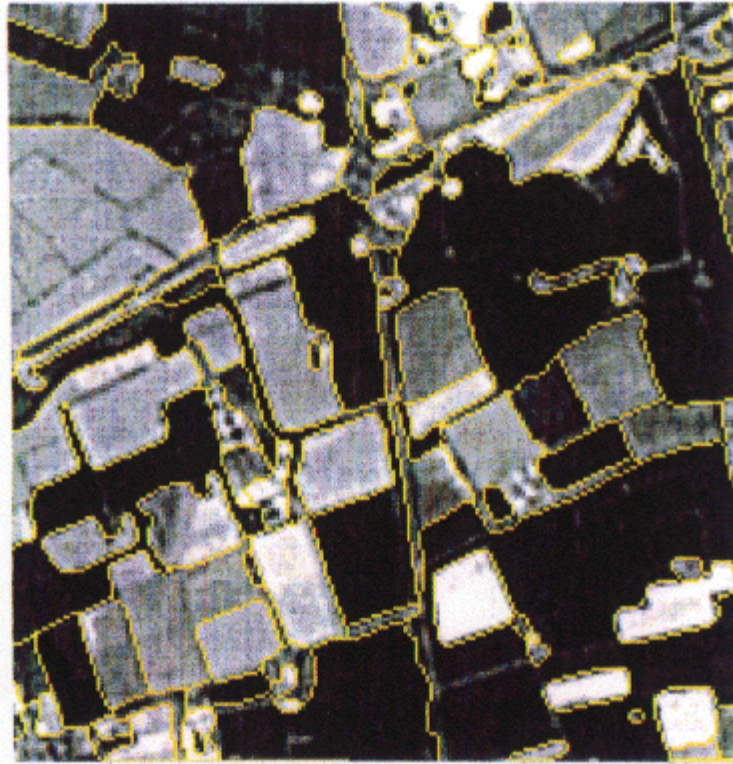
image panchromatique



combinaison colorée



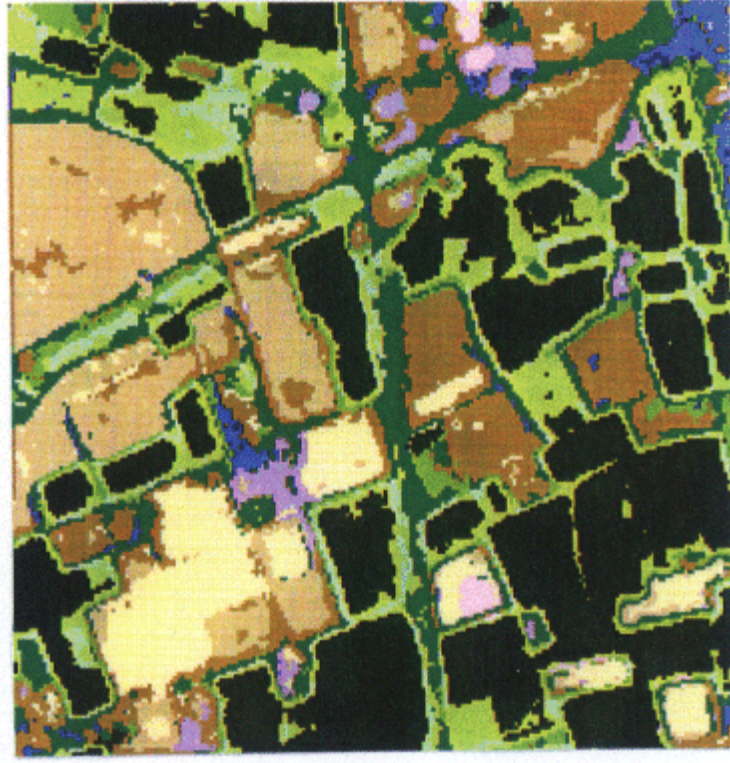
contours de parcelles sur
l'image panchromatique



parcelles étiquetées



classification thématique



croisement parcelles / classification

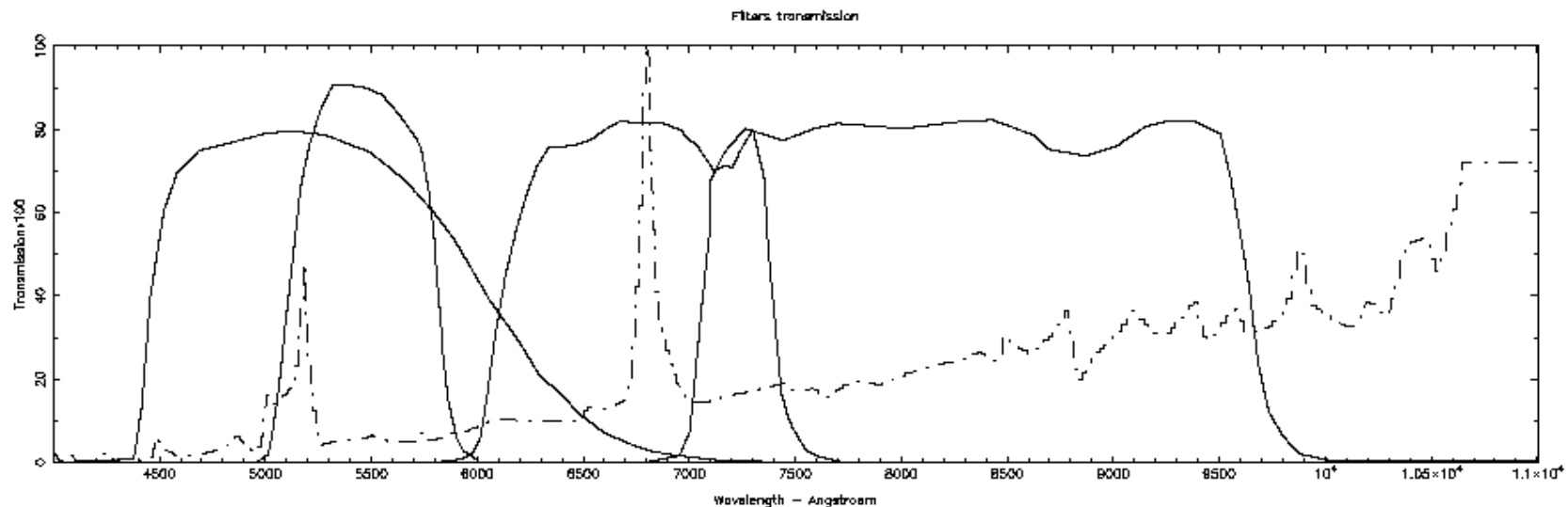


Exemple Radiogalaxie 3C120

Observations au HST

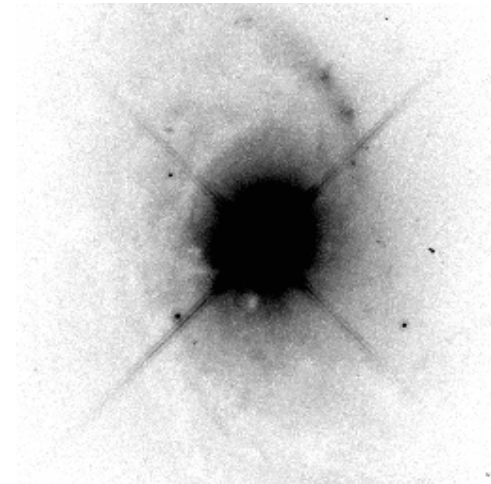
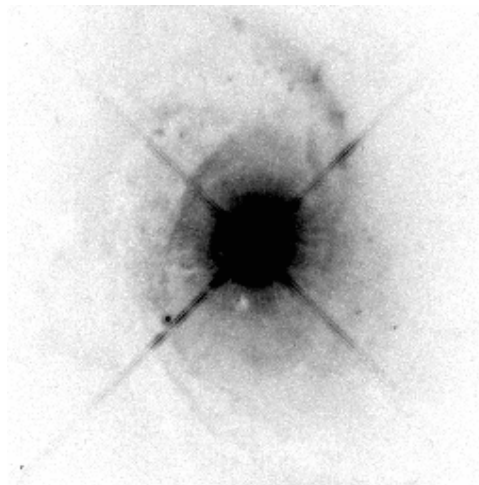
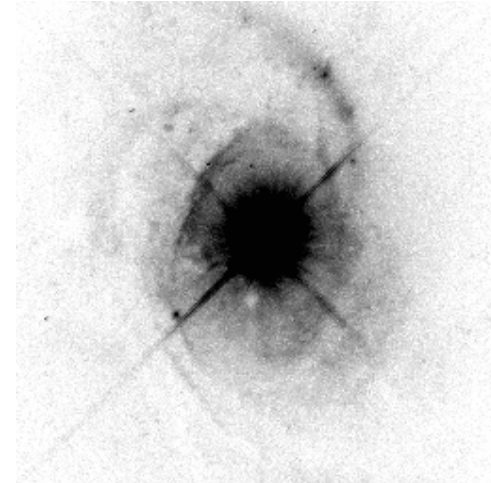
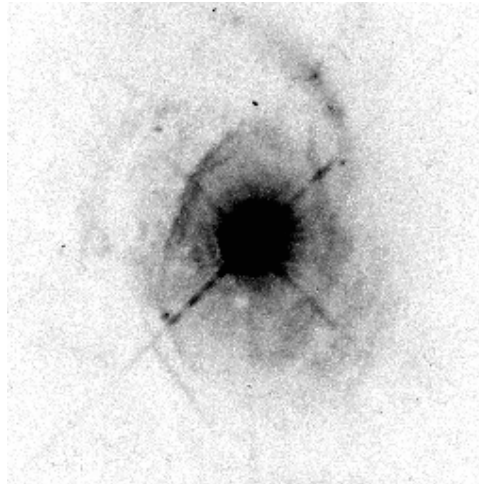
Données HST de 3C120

- Observations WFPC2 25 Juillet 1995
 - F547M (V1) : OIII +Continu (2x1100s)
 - F555W (V) : F547M+Continu (2x1000s)
 - F675W (R) : H α +Continu (2x1100s)
 - F814W (I) : Faibles raies + Cont. (2x1100s)



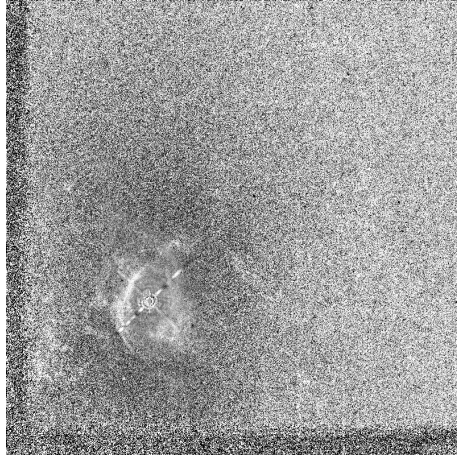
Images après Réduction

- Les traces des rayons cosmiques sont enlevés
- La partie centrale est extraite
- La variance du bruit est stabilisée

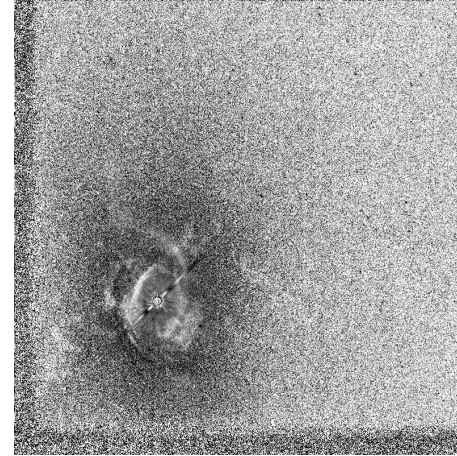


Indices de couleur

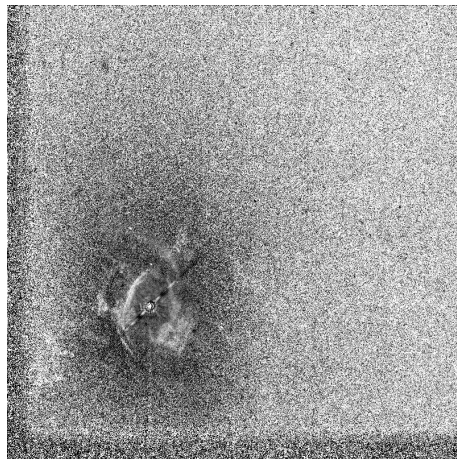
R-I.mag



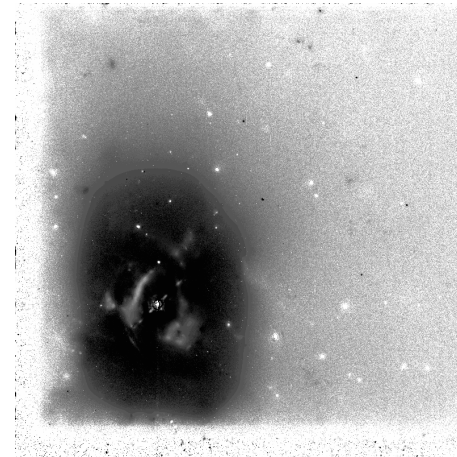
V-I. mag



Vp-I.mag

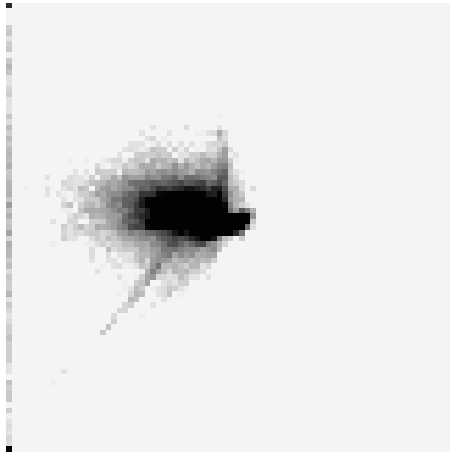


Vp-I.fon

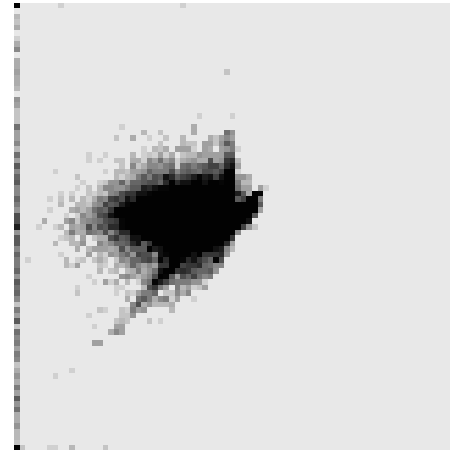


Répartition des indices

Vp-R_mag.hist



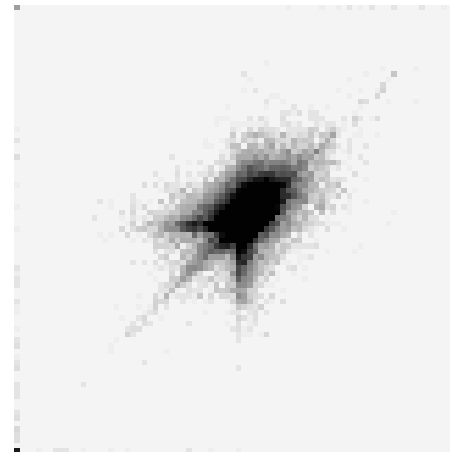
Vp-I_mag.hist



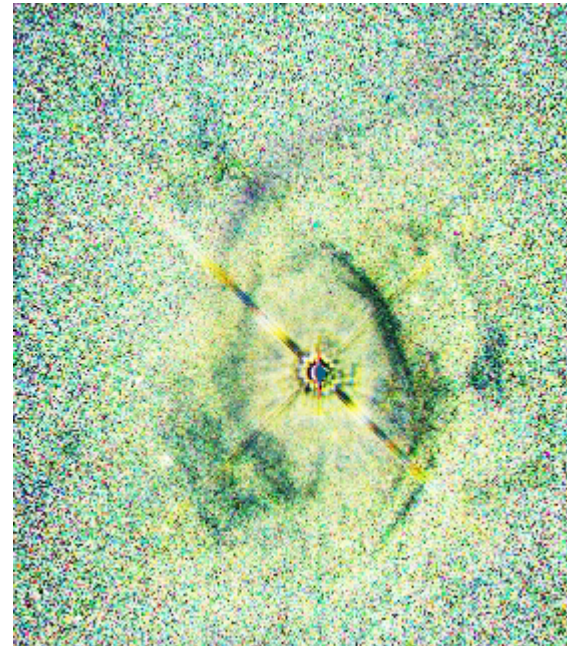
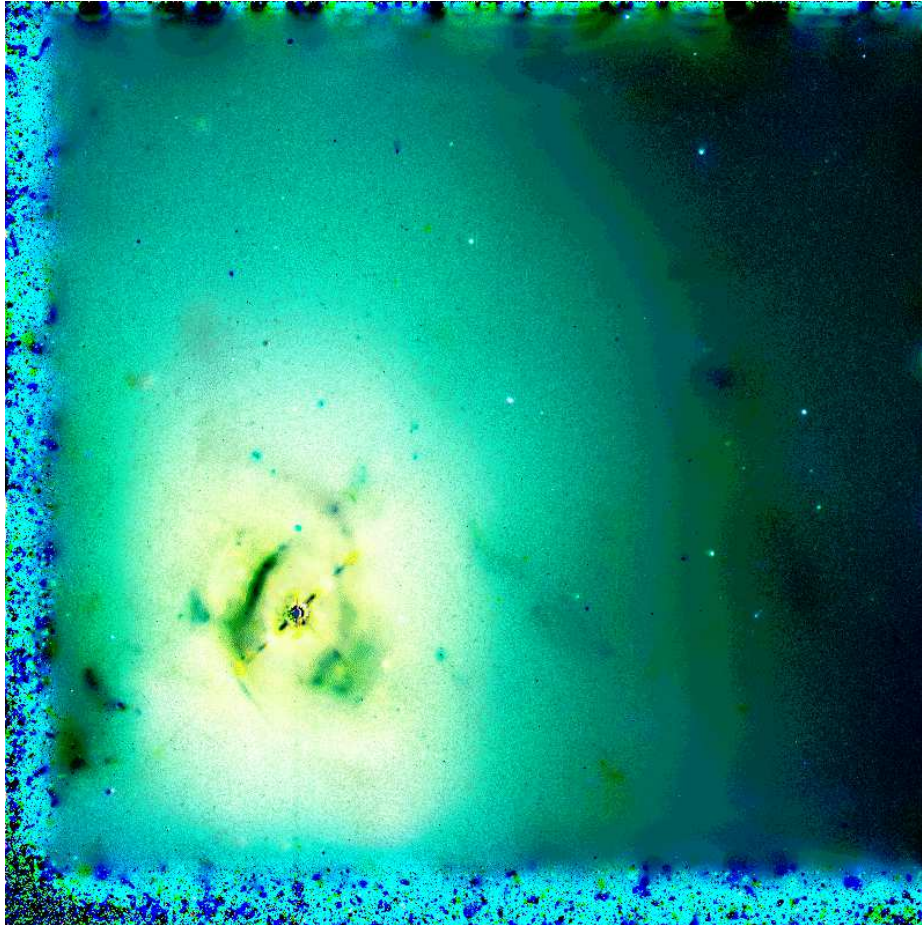
Vp-V_mag.hist



V-R_mag.hist



Combinaison des couleurs



Séparation en sources

- Modèle du «Cocktail party»

$$X_i = \sum_j a_{ij} S_j + N_i \qquad X = AS + N$$

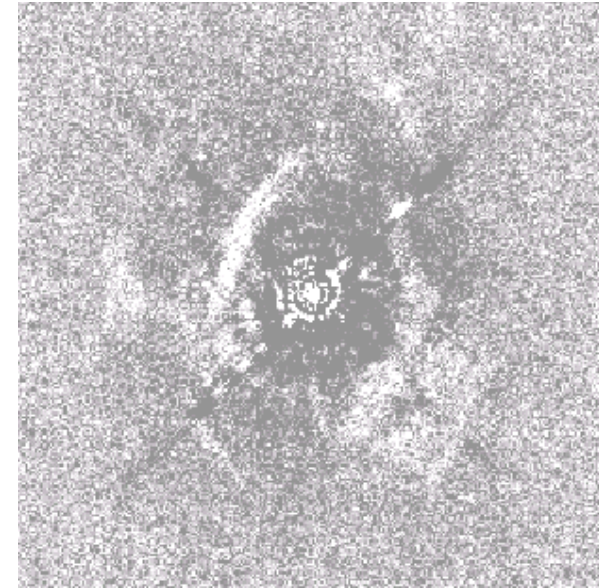
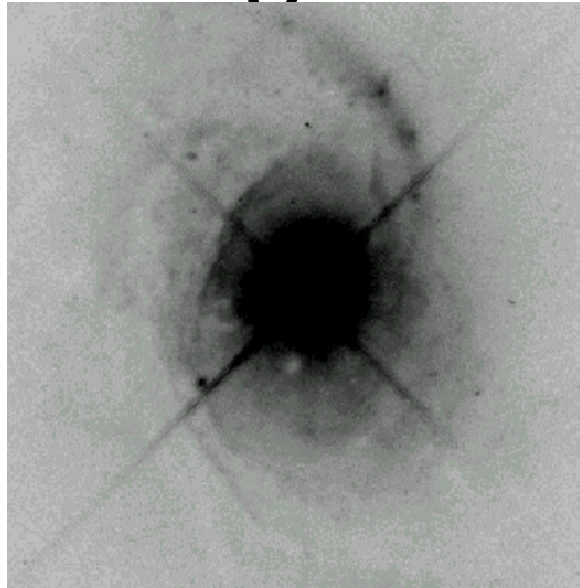
- Hypothèses :
 - Décorrélation (ACP, KL)
 - Indépendance spatiale (SOBI)
 - Sources indépendantes (ICA)
 - Plus généralement “diversité”
- Applications en astrophysique

L'expansion de Karhunen-Loève

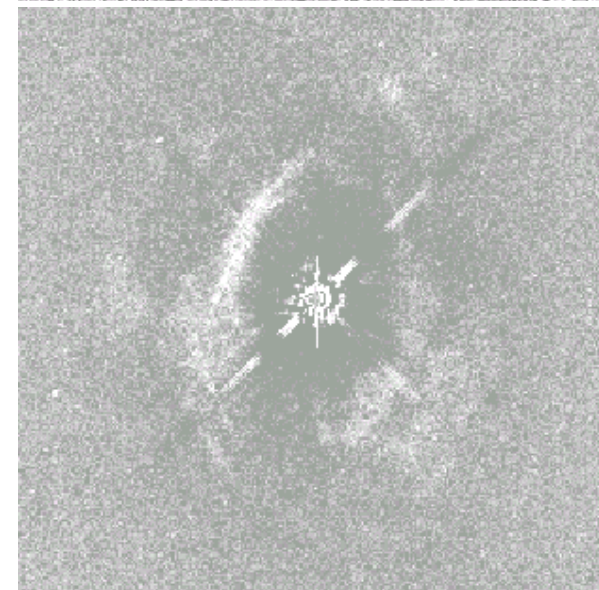
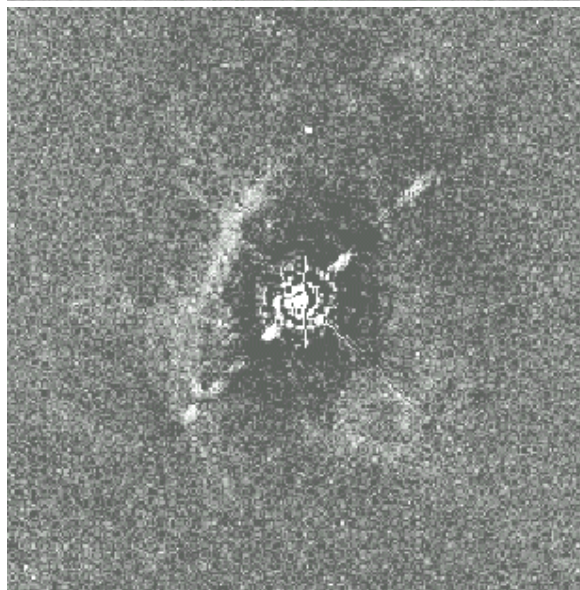
- L'Image i est un processus aléatoire
 - Recherche d'images non-corrélées
- Matrice de Variance-covariance
 - Diagonalisation par ordre décroissants (ACP)
- Si Gaussien : Décorrélation = indépendance
 - Si non : Il peut exister des sources plus indépendantes

KL - Images de 3C120

- L'énergie est concentrée dans la source 1



- Il existe une dépendance visuelle entre les sources



Information Mutuelle

- Entropie d'une source

$$E(S_i) = - \sum_n P_{S_i}(n) \log_2 P_{S_i}(n)$$

- Entropie conjointe d'un couple de sources

$$E(S_1, S_2) = - \sum_{n_1, n_2} P_{S_1, S_2}(n_1, n_2) \log_2 P_{S_1, S_2}(n_1, n_2)$$

- Information mutuelle entre deux sources

$$I_{ij} = E_i + E_j - E_{ij}$$

$$I(S_1, S_2) = - \sum_{n_1, n_2} P_{S_1, S_2}(n_1, n_2) \log_2 \frac{P_{S_1, S_2}(n_1, n_2)}{P_{S_1}(n_1) P_{S_2}(n_2)}$$

Information Mutuelle

- Information Mutuelle entre / sources

$$I(S_1, \dots, S_l) = \sum_{n_1, \dots, n_l} P(n_1, \dots, n_l) \log_2 \frac{p(n_1, \dots, n_l)}{\prod_{i=1, l} p_{S_i}(n_i)}$$

- Information Mutuelle observée

$$I(S_1, \dots, S_l) = \sum_l E(S_l) - E(S_1, \dots, S_n)$$

- Information Mutuelle des Sources

- Pour chaque source (1-D) : $E_i = - \sum_k \frac{H_i(n)}{N} \log_2 \frac{H_i(n)}{N}$

- Entre deux sources (2-D) : $I_{ij} = E_i + E_j - E_{ij}$

- Pour chaque séparation : $I = \sum_{i < j} I_{ij}$

SAS par l'ACI

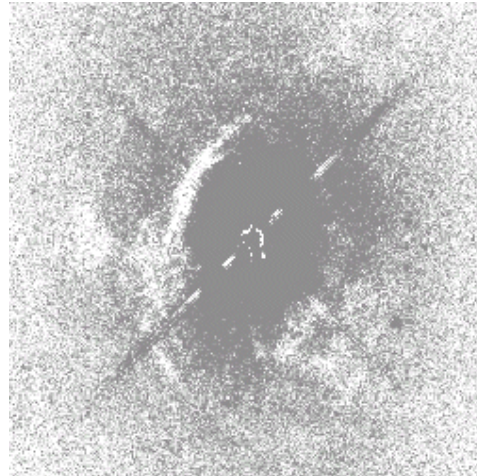
- **JADE** J.F. Cardoso and A. Souloumiac
 - L'estimation de l'entropie est basé sur les cumulants d'ordre 4
- **FastICA**
 - Approximation de la négentropie: complément de l'entropie par rapport à une distribution gaussienne (toujours positive)

$$J_G(y) = \left| E_y \{G(y)\} - E_v \{G(v)\} \right|^p$$

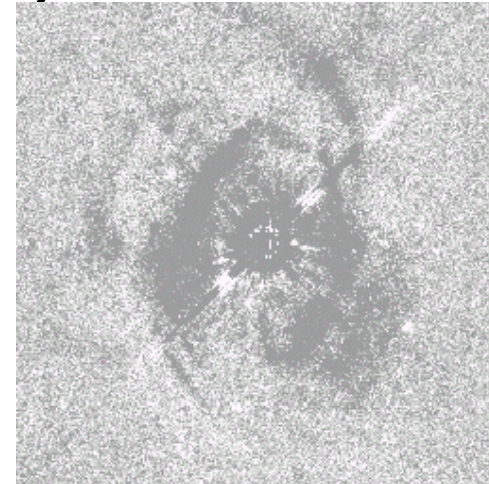
Meilleure Séparation avec FastICA

Déflation $th(y)$

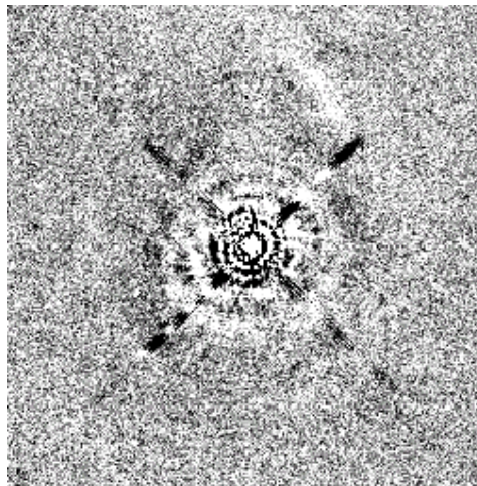
- Source 1 :
Noyau



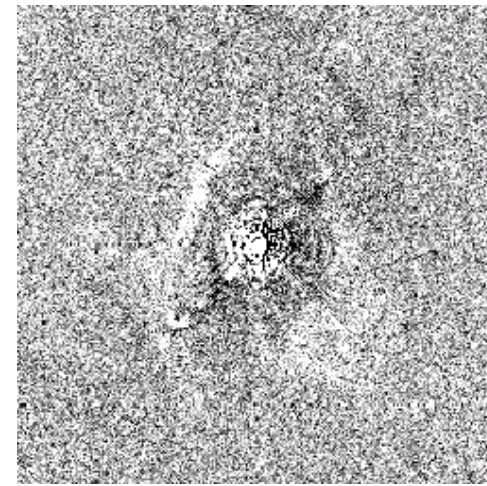
- Source 2 :
Nuages Gazeux (Gaseous Clouds)



- Source 3 :
Fonction
d'étalement pour
 $H\alpha$



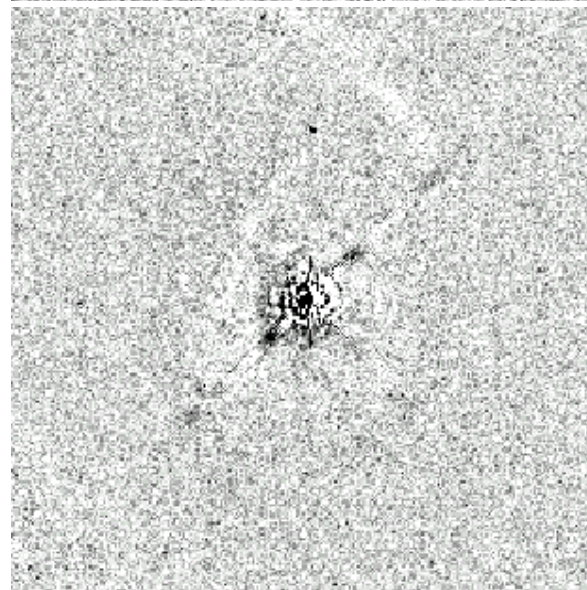
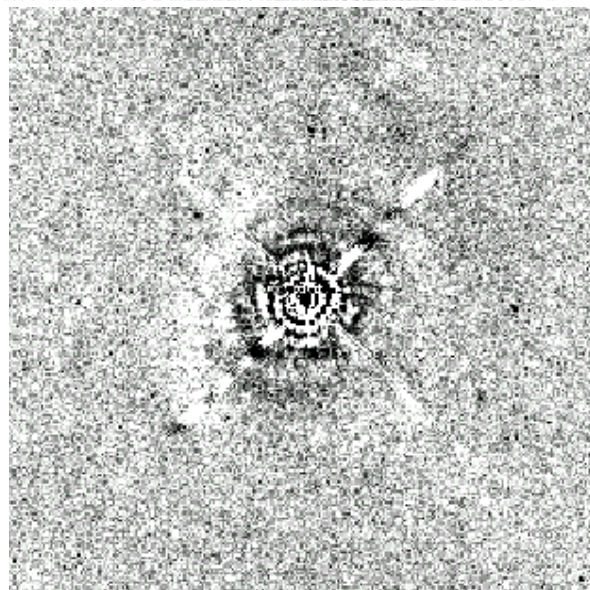
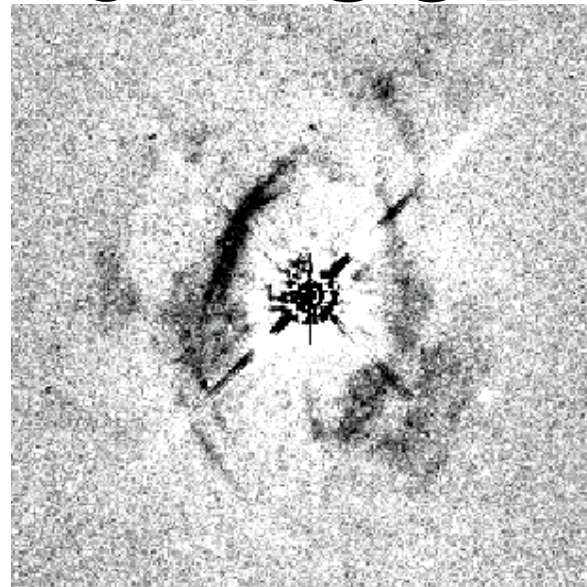
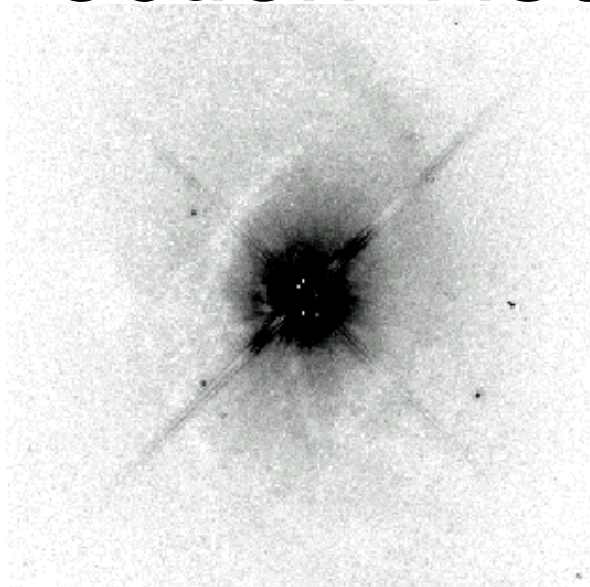
- Source 4 :
Asymétrie



SAS & Corrélations Temporelles/Spatiales

- SOBI matrices de corrélation à partir de l'espace direct
 - p matrices de corrélation entre les sources et les sources décalées
 - diagonalisation conjointe des p matrices de corrélation
- FSOBI : matrices de corrélation à partir de l'espace de Fourier

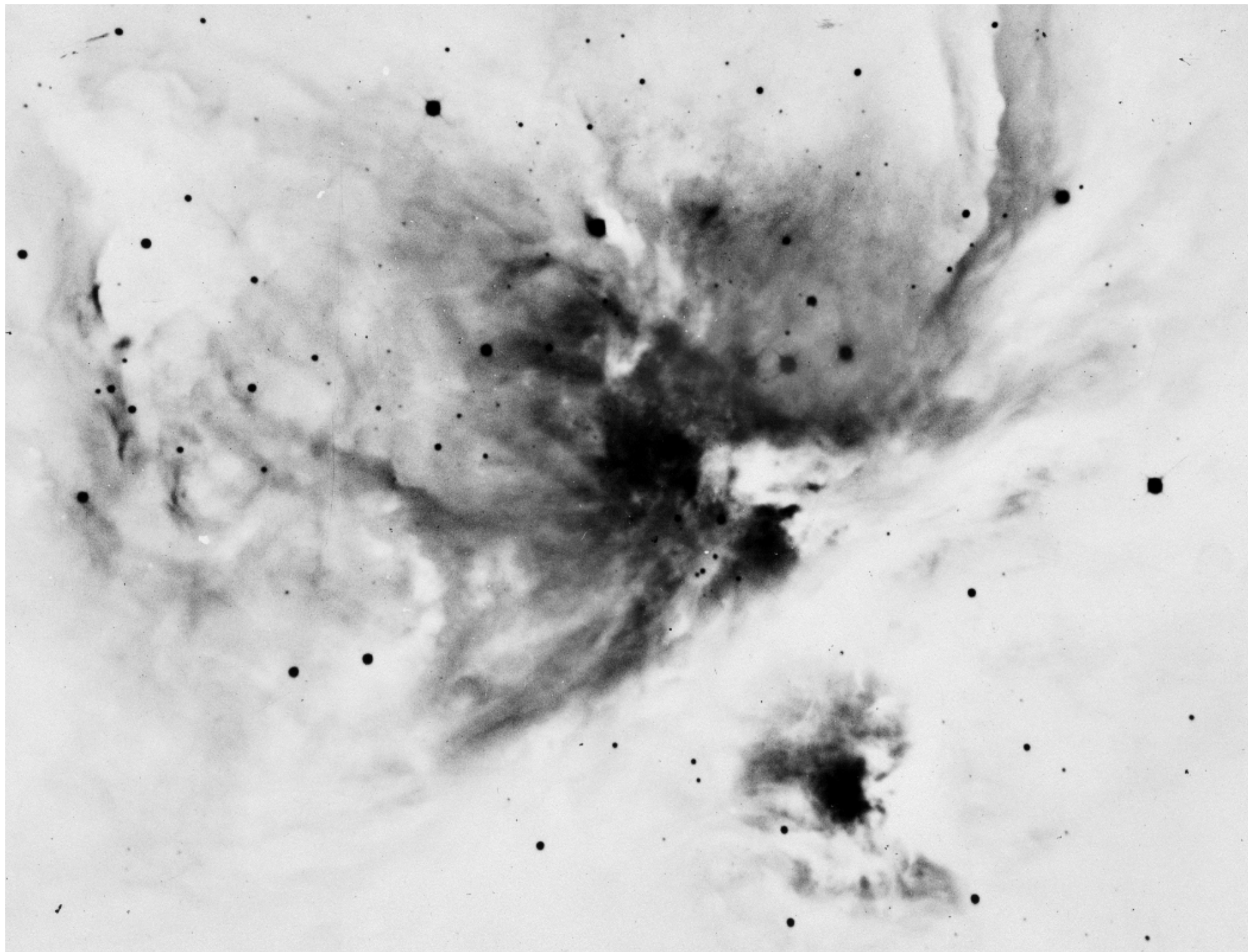
Sélection Visuelle : FSOBI



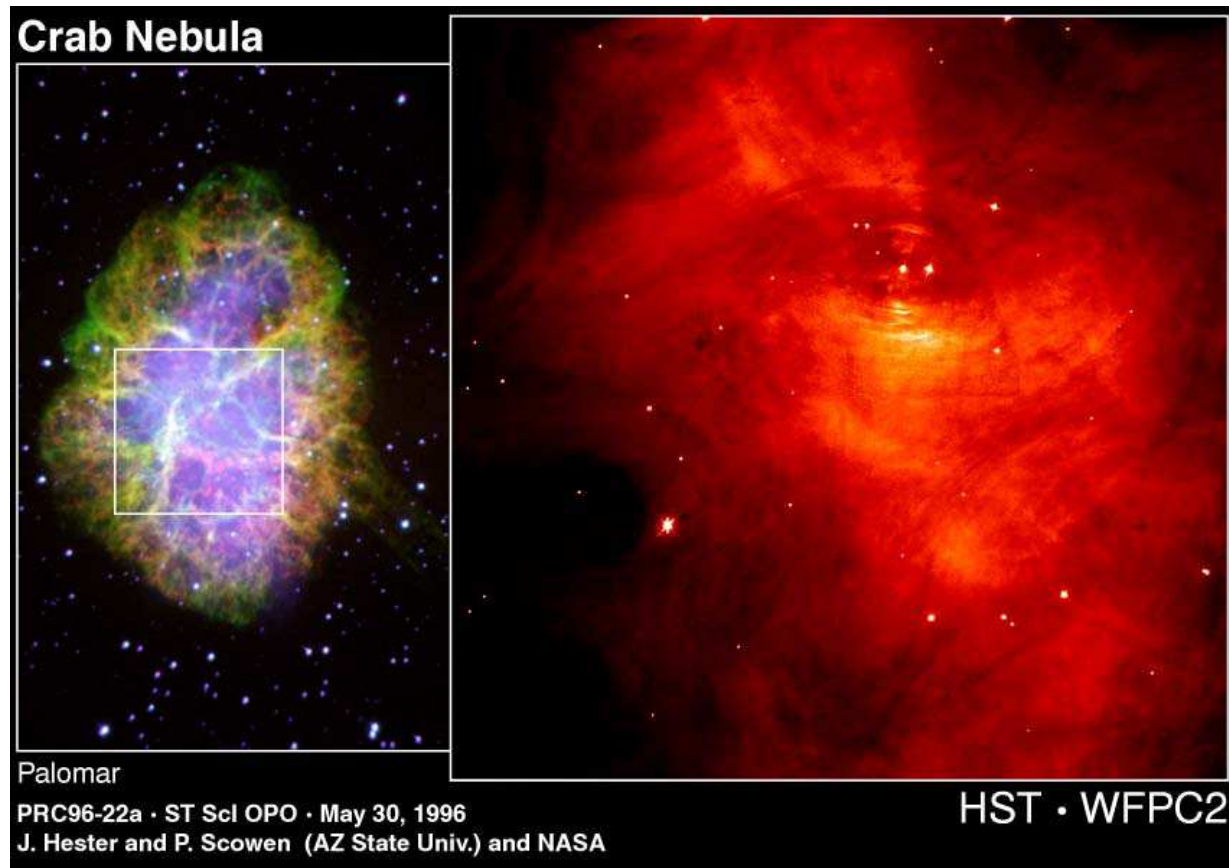
6^{ième} leçon

Analyse multiéchelle

Exercice sur la morphologie mathématique



M1 observé au HST



Observons les astres

- La surface terrestre
 - Collines, montagnes & chaînes
- Planètes
 - Jupiter : tourbillons, bandes
 - Anneaux de Saturne
- Régions Gazeuses
 - Ex. Complexe d'Orion
- L'Univers
 - Galaxies > Amas de Galaxies > Grandes Structures

Structures hiérarchisées

- Les structures observées sont irrégulières, indescriptibles pour une modélisation basée sur des fonctions analytiques. Cette irrégularité n'est un simple bruit, mais le résultat des processus physiques. Son étude doit permettre d'approfondir la compréhension des structures
- **Présence d'une hiérarchie de structures**
 - Importance de l'échelle de structure
 - Couplage d'une échelle à l'autre
 - Innovation à chaque échelle
- **Processus stochastique sur un arbre**
 - Fractalité & Multifactalité
 - Liens avec l'hydrodynamique

Objectifs

- Détecter les différentes composantes
 - Décrire précisément ces composantes
 - Construire des indicateurs statistiques pour tester des modèles
 - Classifier les structures dans un cadre hiérarchique
 - Synthétiser des images similaires
- La transformation en ondelettes apparaît comme la voie la plus adaptée au problème

Vers l'approche multiéchelle

- Optimisation de la détection :
 - Corrélation croisée avec une fonction qui se dilate avec l'échelle
- Élimination du fond
 - Le patron doit être à moyenne nulle
- Invariance par translation
 - Transformation en ondelettes continue
- Discrétisation & non redondance
 - Analyse multirésolution
- Discrétisation & redondance
 - Algorithme à trous

Approximation par des fonctions translatées

- Principe
- Équation de base
- Fonction d'échelle
- Projection associée
- Orthogonalité

Approximation par des fonctions translattées

- Soit $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$.
Posons:

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k)\varphi(x-k)$$

- Déterminer les $a(k)$ rendant minimum:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx$$

Équation des coefficients $a(k)$

$$c(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x-k)dx$$

- Les équations normales s'écrivent:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k)[f(x) - \sum_l a(l)\varphi(x-l)]dx = 0$$

- Soit:

$$c(k) = \sum_l a(l)A(k-l)$$

- Où

$$A(k-l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k)\varphi(x-l)dx$$

Inversion de l'équation

- Équation de convolution discrète
- Passage à la transformation de Fourier

$$\hat{c}(\nu) = \hat{a}(\nu) \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}(\nu + k)$$

- Nous avons:

$$\hat{A}(\nu) = \left| \hat{\phi}(\nu) \right|^2$$

- Condition de l'inversion (1)

$$\hat{S}(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{\phi}(\nu + k) \right|^2 \neq 0$$

Fonction d'échelle

- $\varphi(x)$ est appelée la fonction d'échelle
- $c(k)$ mesure le poids de la fonction $f(x)$ autour du point k
- Si la condition (1) est satisfaite l'inversion permet d'obtenir une solution unique
- Sinon on est dans un cas de problème mal-posé

Projection associée

- $f(x)$ conduit à $g(x)$
- Quelle est la fonction associée à $g(x)$?
- Nous posons:
$$d(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x-k)dx$$
- Nous avons:
$$d(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_l a(l)\varphi(x-l)\varphi(x-l)dx = \sum_l a(l)A(k-l) = c(k)$$
- On retrouve donc $g(x)$
 - La relation entre $f(x)$ et $g(x)$ est une projection

Fonctions d'échelle orthogonales

- Si $\hat{S}(v) = 1$ alors $a(k) = c(k)$

- La projection s'écrit:

$$f_0(x) = \sum_k c(k) \varphi(x - k)$$

- L'approximation dérive directement des produits scalaires

Le sinus cardinal fonction d'échelle

- Orthogonalité des fonctions
- Démonstration dans l'espace de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi(x-k)}{\pi(x-k)} \frac{\sin \pi(x-l)}{\pi(x-l)} dx = \frac{\sin \pi(l-k)}{\pi(l-k)}$$

- Interpolation = Approximation
- V_0 est l'espace des fonctions à support borné en fréquence

Interpolation du plus proche voisin

- Nous avons $\varphi(x) = B_0(x) = R(x)$

- Soit

$$\hat{\varphi}(v) = \frac{\sin \pi v}{\pi v}$$

- Absence de fréquence de coupure
- Orthogonalité \rightarrow démonstration directe

Interpolation linéaire

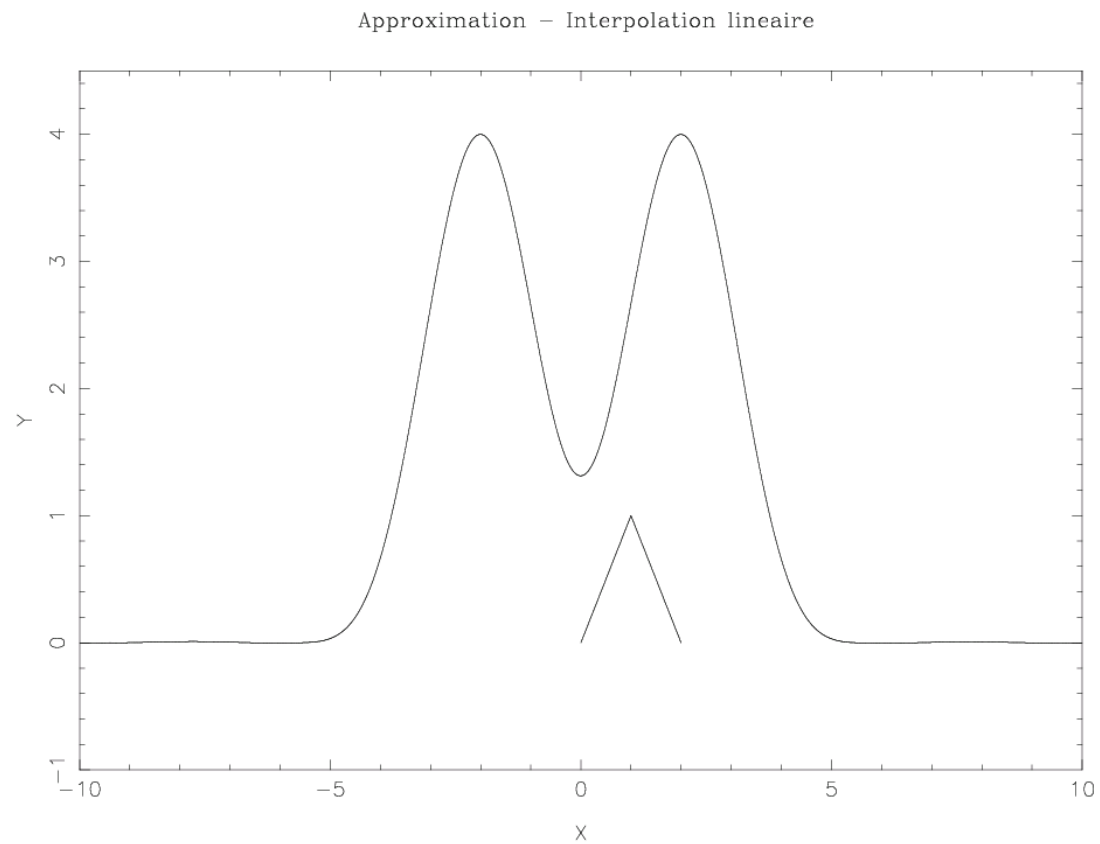
- Nous avons $\varphi(x) = B_1(x) = T(x)$

- Soit

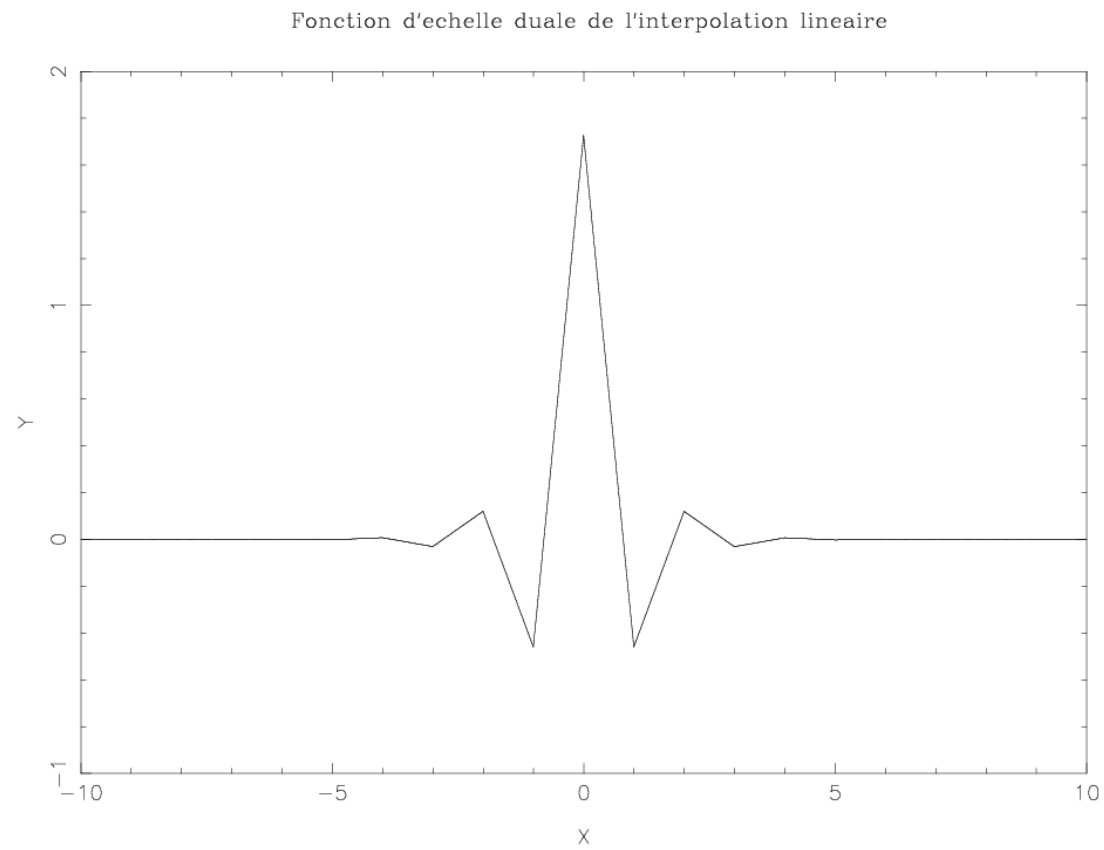
$$\hat{\varphi}(v) = \frac{\sin^2 \pi v}{(\pi v)^2}$$

- Absence de fréquence de coupure
- Non-Orthogonalité
- Orthogonalisation \rightarrow Lemarié-Battle

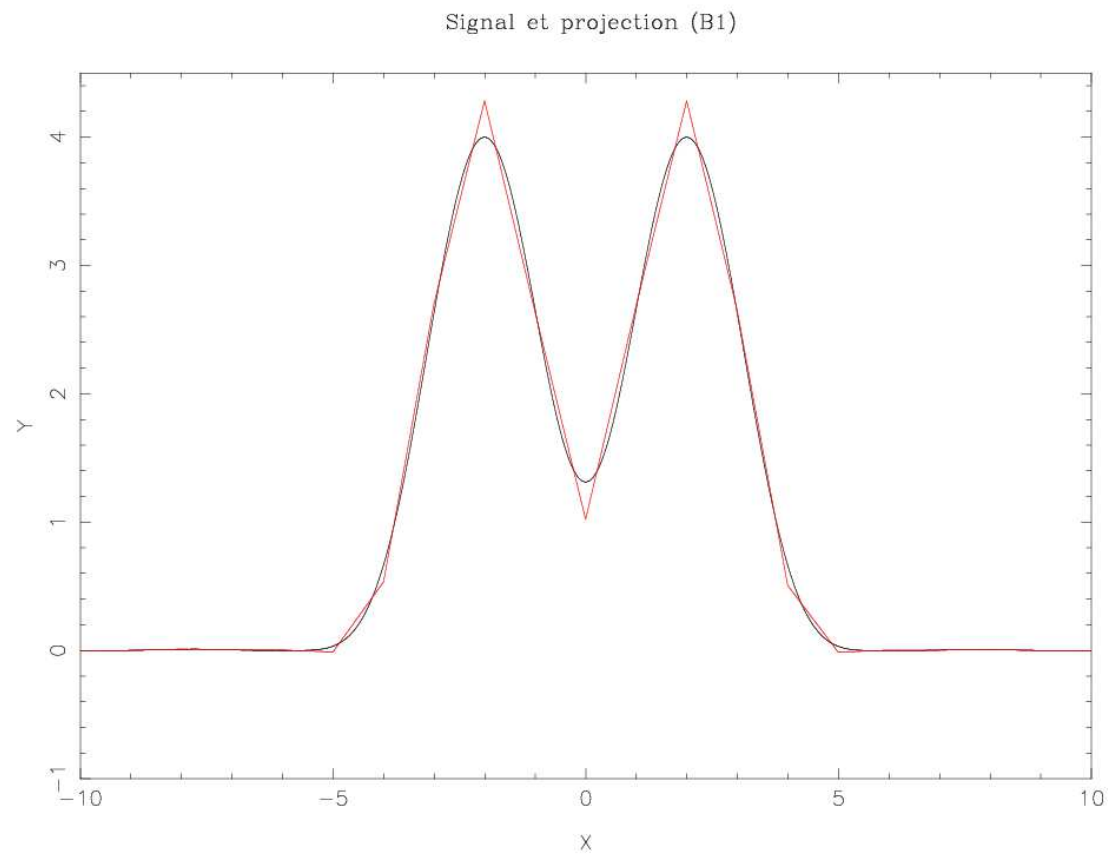
Approximation linéaire



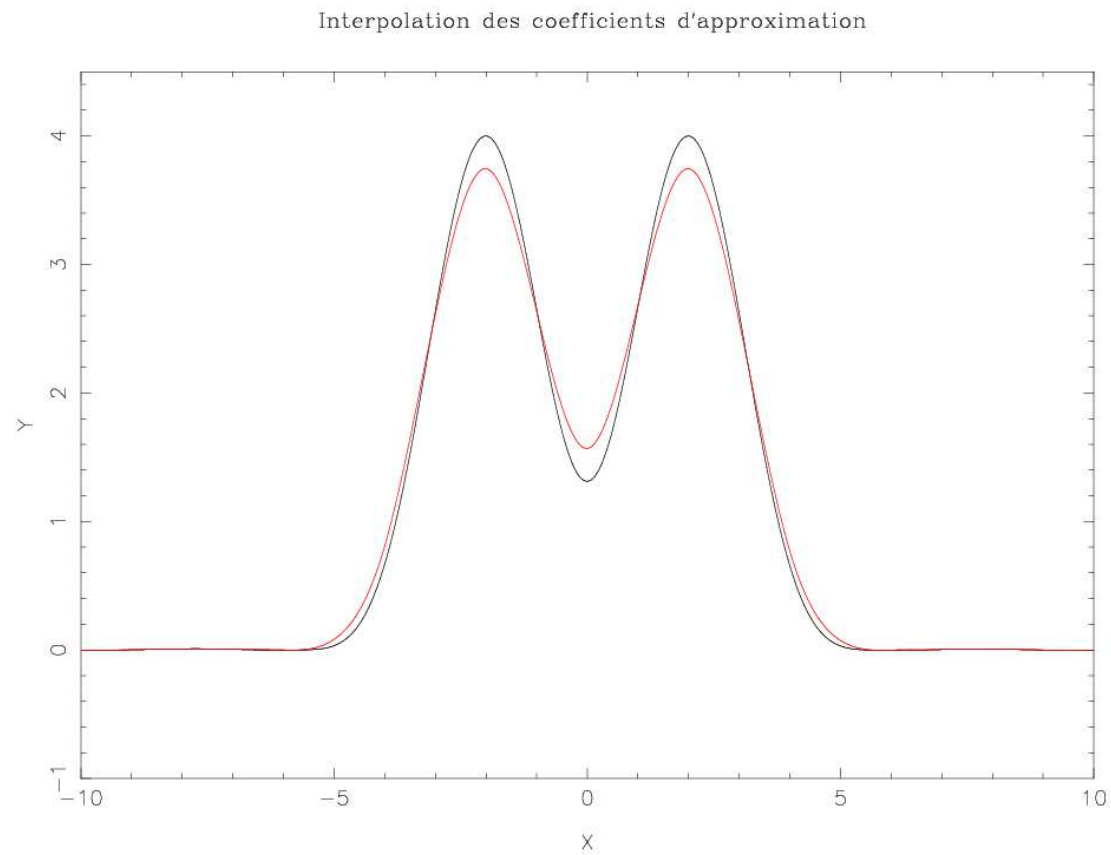
Fonction d'échelle duale



Projection V_0



Interpolation des coefficients



Multirésolution à 1D

- Équation de dilatation & Pyramide de résolution
- Ondelettes & Multirésolution
- Filtres associés
- Algorithme du banc de filtres
- Bi-orthogonalité
- Le lifting scheme

Échelle d'analyse

- Nous avons:

$$c(k) = \langle f(x), \varphi(x - k) \rangle$$

- Ce qui permet de reconstruire par:

$$\tilde{f}(x) = \sum c(k) \tilde{\varphi}(x - k)$$

- On dilate de a la fonction d'échelle

$$c(a, k) = \langle f(x), \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x}{a} - k\right) \rangle$$

- Quel est le lien entre $c(k)$ et $c(a, k)$?

Équation de dilatation

- Ces coefficients sont en relation linéaire si:

$$\frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) = \sum_n h_a(n) \varphi(x - k)$$

- Nous avons alors :

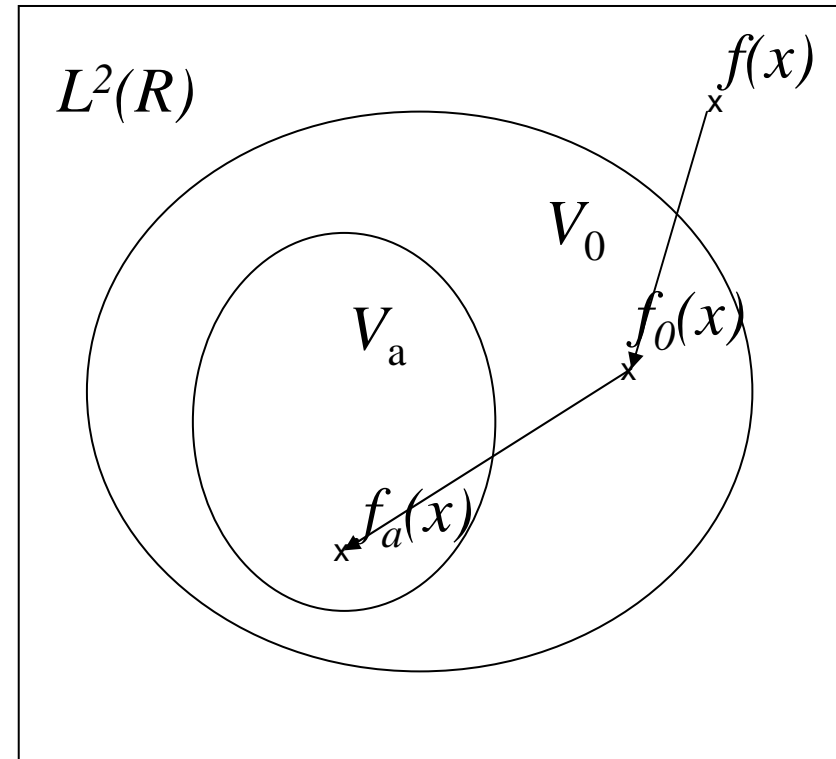
$$c(a, k) = \langle f(x), \sum_n h_a(n) \varphi(x - ak - n) \rangle$$

- D'où: $c(a, k) = \sum_n h_a(n) c(ak + n)$

- Les coefficients se déduisent sans recours à $f(x)$
- Réduction d'un facteur a de leur nombre

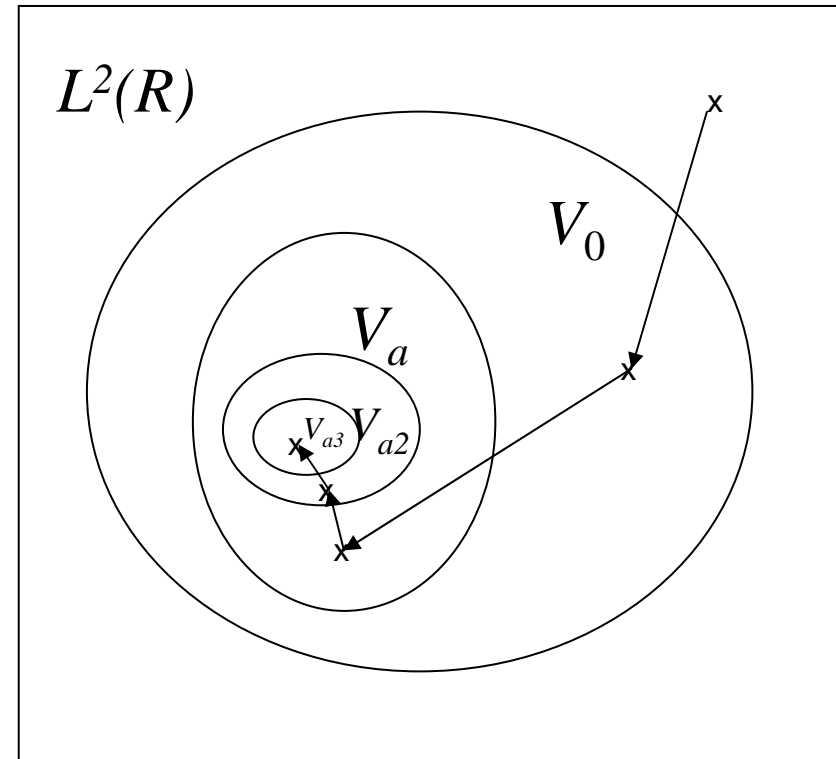
Emboîtement des espaces

- Le sous-espace V_a est associé à l'approximation à l'échelle a
- Si la fonction d'échelle satisfait l'équation de dilatation, cette approximation appartient aussi à V_0
- L'espace V_a est emboîté dans l'espace V_0



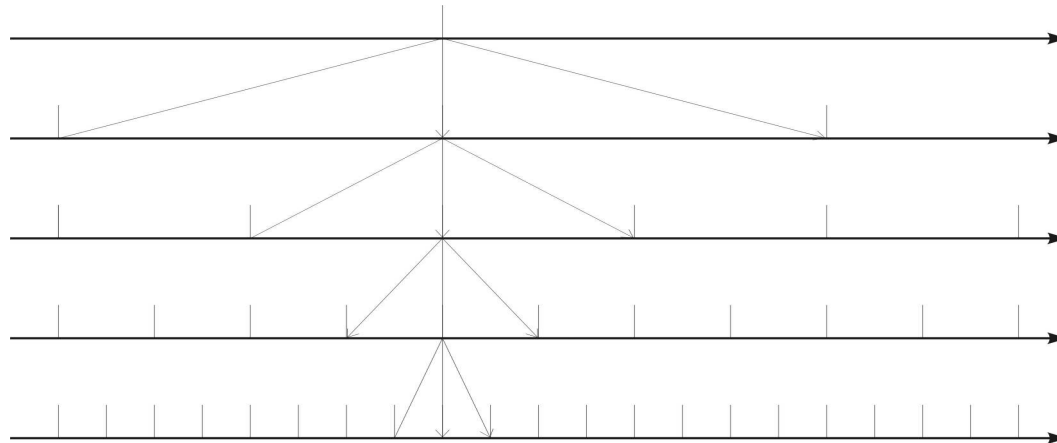
Pyramide de résolution

- On itère la dilatation de la fonction d'échelle
- Les sous-espaces des approximations sont successivement emboîtés si la fonction d'échelle satisfait l'équation de dilatation.
- L'ensemble des coefficients forme la pyramide de résolution



Analyse dyadique

- C'est la cas où $a=2$
- Les coefficients sont décimés d'un facteur 2 d'une échelle à l'autre
- N coefficients à l'échelle 1 $\rightarrow 2N-1$ coefficients



Cas de l'orthogonalité

- Rappelons que nous devons alors avoir :

- $$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(v+k)|^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(2v+k)|^2 = 1$$

- On sépare les termes k pairs des termes impairs

- On utilise la relation :

$$\hat{\phi}(2v) = \hat{h}(v)\hat{\phi}(v)$$

- En tenant compte de la périodicité de $\hat{h}(v)$ on obtient :

$$\left| \hat{h}(v) \right|^2 + \left| \hat{h}\left(v + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1$$

Espace complémentaire

- Comme V_1 est inclus dans V_0 , nous avons:

$$f_0(x) = f_1(x) + g_1(x)$$

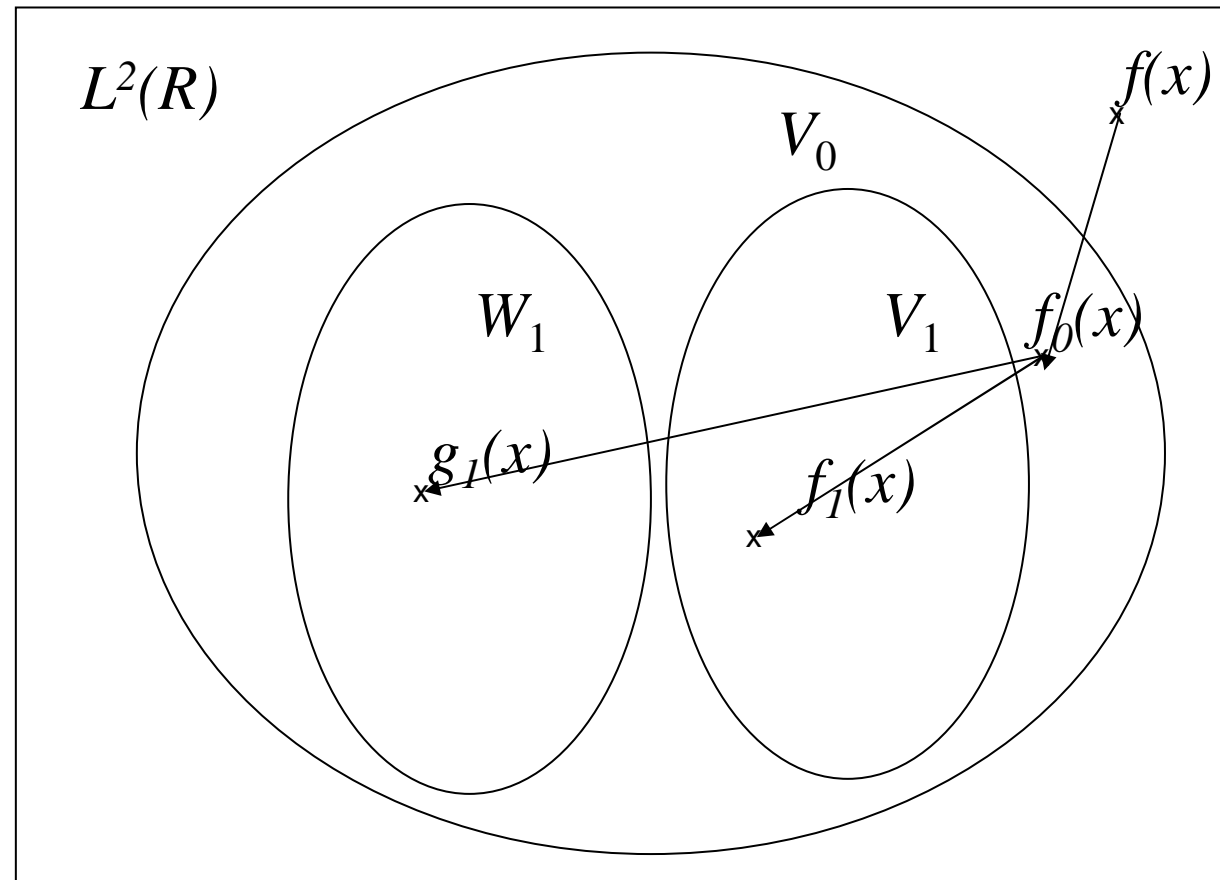
où $f_0(x)$ et $f_1(x)$ sont les approximations dans V_0 et V_1 .

Nous avons:

$$f_1(x) = \sum c(1, k) \tilde{\varphi}\left(\frac{x}{2} - k\right)$$

- $g_1(x)$ est nécessairement une fonction de V_0
- Elle fait partie du complémentaire W_1 de V_1 dans V_0

Décomposition d'une fonction



Base ondelette

- Nous pouvons écrire la fonction $g_1(x)$ sous la forme

$$g_1(x) = \sum w(1,k) \tilde{\psi}\left(\frac{x}{2} - k\right)$$

- Les coefficients de détail $w(1,k)$ peuvent être obtenus par projection sur une base $\psi(x)$:

$$w(1,k) = \langle f(x), \frac{1}{2} \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \rangle$$

- La base est telle que

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_n g(n) \varphi(x - n)$$

Coefficients de détail

- On utilise l'expression de $\psi(\mathbf{x})$:

$$w(1, k) = \sum_n g(n)c(k + 2n)$$

- Cas de l'orthogonalité

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(2\nu + k)|^2 = 1$$

- On utilise la relation :

$$\hat{\psi}(2\nu) = \hat{g}(\nu)\hat{\phi}(\nu)$$

- On obtient ainsi :

$$|\hat{g}(\nu)|^2 + \left| \hat{g}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1$$

Relation entre les coefficients

- Les sous-espaces engendrés sont orthogonaux , d'où :

$$\sum_k \hat{\phi}(\nu + k) \hat{\psi}^*(\nu + k) = 0$$

- On obtient ainsi dans le cas orthogonal :

$$\hat{h}(\nu) \hat{g}^*(\nu) + \hat{h}(\nu + \frac{1}{2}) \hat{g}^*(\nu + \frac{1}{2}) = 0$$

- Filtres miroirs conjugués

$$\hat{g}(\nu) = e^{-2\pi i \nu} \hat{h}^*(\nu + \frac{1}{2})$$

- Filtre discret

$$g(n) = (-1)^{1-n} h(1-n)$$

Reconstruction

- En principe $f_1(x)$ et $g_1(x)$ peuvent être reconstruits à l'aide des bases V_1 et W_1
→ On peut reconstruire $f_0(x)$
- Base de V_0 en fonction de celle de V_1 et

W_1 :

$$\varphi_0(x - k) = 2 \sum_l h(k - 2l) \varphi_1(x - 2l) + g(k - 2l) \psi_1(x - 2l)$$

- Expression du coefficient d'approximation

$$c_0(k) = 2 \sum_l h(k - 2l) c_1(l) + g(k - 2l) w_1(l)$$

Itération et théorème de l'analyse multirésolution

- On peut itérer ce qui permet d'obtenir des détails de plus en plus grossiers de la fonction $f(x)$. D'où le théorème:

Étant donné une fonction d'échelle $\varphi(x)$ orthogonale et satisfaisant l'équation de dilatation, on lui associe une fonction ondelette $\psi(x)$ permettant de donner les détails d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ à toutes les résolutions i . Toute fonction de cet espace peut être complètement décrite par la connaissance des détails:

$$f(x) = \sum_{i,k=-\infty}^{\infty} d(i,k) \frac{1}{2^i} \psi\left(\frac{x}{2^i} - k\right)$$

Décomposition de Littlewood-Paley (1)

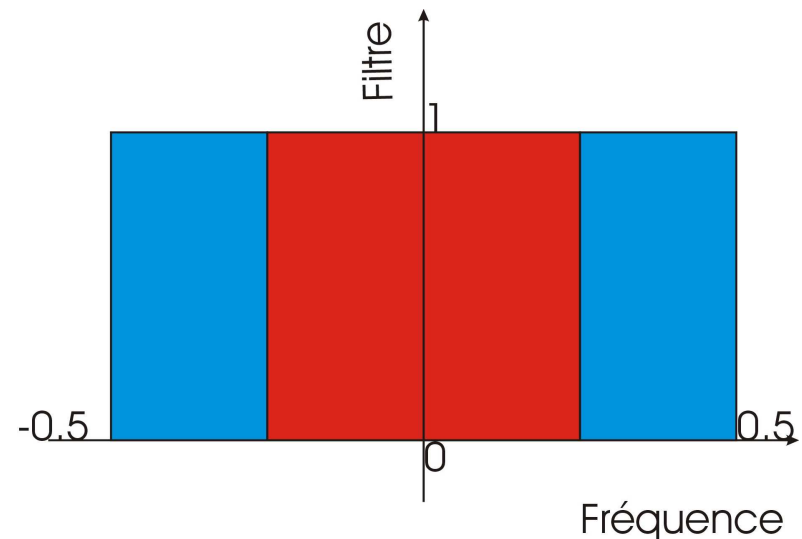
- Dilatation du sinus cardinal :

$$\frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_n h(n) \operatorname{sinc}(x - k)$$

- Application du théorème de Shannon :

$$h(n) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

- Convergence lente
- Décomposition progressive dans des bandes dans le plan de Fourier



Décomposition de Littlewood-Paley (2)

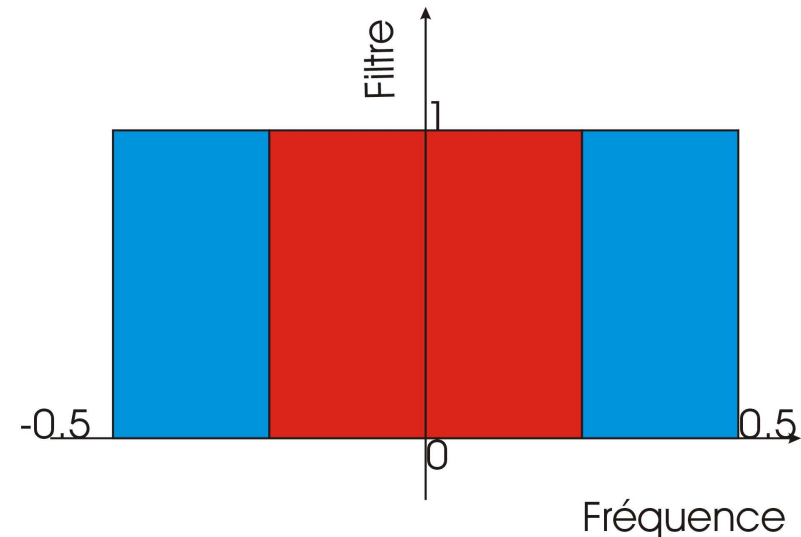
- Les coefficients en ondelettes correspondent aux hautes fréquences:

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sin c(x) - \frac{1}{2}\sin c\left(\frac{x}{2}\right)$$

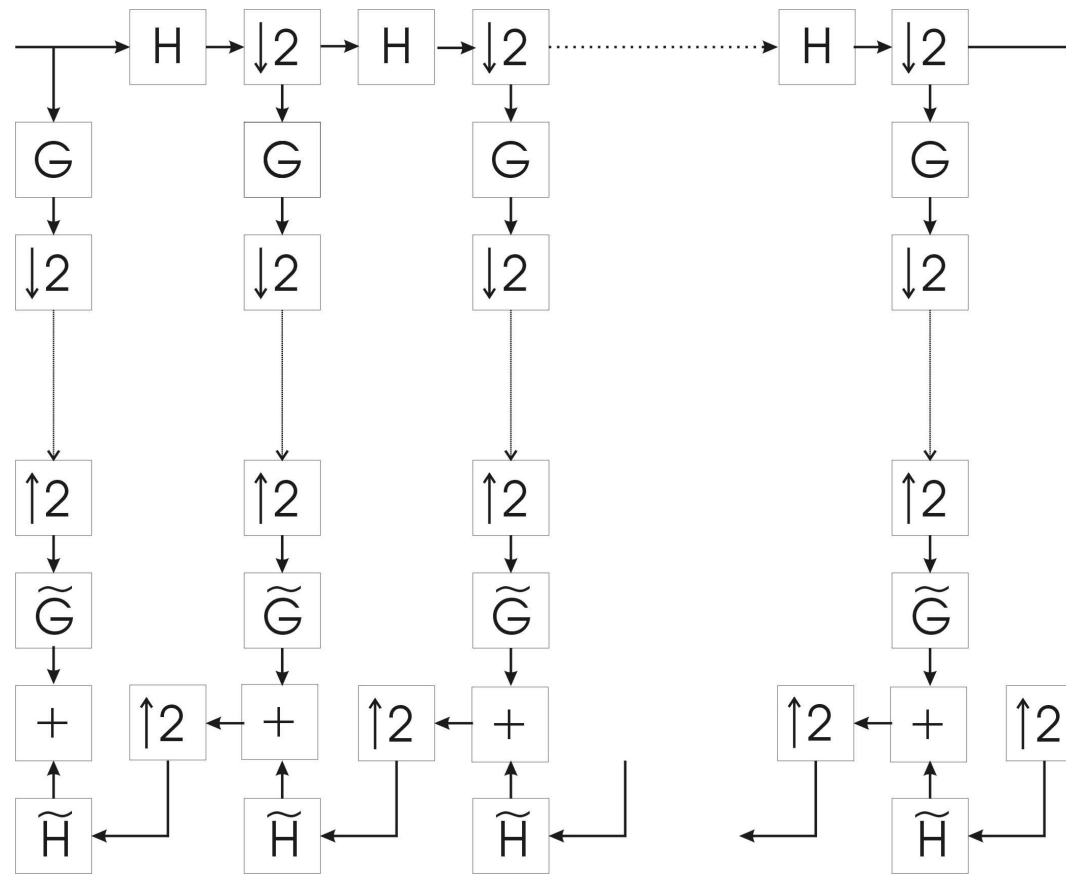
- D'où le filtre:

$$g(n) = -\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right)$$

– À l'origine $g(0)=0.5$



Algorithme du banc de filtre



Conditions du banc de filtre

- Pour restaurer exactement le banc de filtres il faut les deux conditions suivantes:

$$\hat{h}(\nu)\hat{\tilde{h}}(\nu) + \hat{g}(\nu)\hat{\tilde{g}}(\nu) = 1$$

$$\hat{h}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hat{\tilde{h}}(\nu) + \hat{g}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hat{\tilde{g}}(\nu) = 0$$

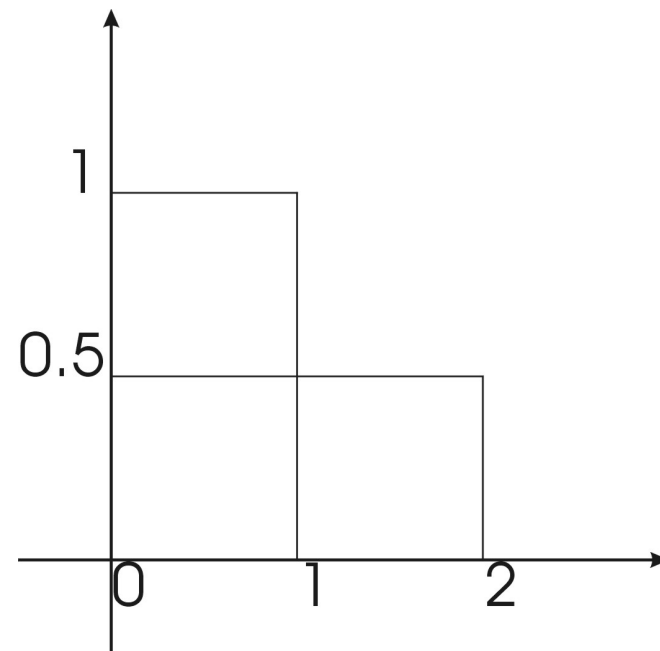
- La première assure la reconstruction exacte, la seconde permet d'éliminer les effets de recouvrement spectral dus à la décimation

Fonction caractéristique

- Dilatation de la fonction caractéristique $\Pi(x)$
- Filtre associé

$$\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\Pi(x) + \frac{1}{2}\Pi(x-1)$$

- Convergence lente dans le plan de Fourier
- Pyramide associée : dilatation de la taille du pixel \rightarrow zoom



Transformée de Haar

- Filtres
 - $h(0)=h(1)=0.5$. Tous les autres sont nuls.
 - $g(0)=0.5$ $g(1)=-0.5$. Tous les autres sont nuls.
- Reconstruction immédiate
- Propriétés de l'algorithme
 - N opérations à la construction et à la reconstruction.
 - Place mémoire de N
 - Compacité, pas d'effet de bord
- Non invariance avec la translation
- Généralisation → filtres de Daubechies

La transformée en ondelettes continue

- Définition (1D):

$$w(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^* \left(\frac{x-b}{a} \right) dx$$

- Invariance par translation
- Covariance par dilatation
- Reconstruction : non unicité
- Échantillonnage espace / échelle :
 - Pas de Shannon à chaque échelle
 - Variation des échelles d'un facteur 2 (dyadicité)

Utilisation de l'approximation

- Approximation de la fonction ondelette

$$\frac{1}{2}\psi^*\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_n g(n)\varphi(x-n)$$

- Expression des coefficients échelle 2

$$w(a,b) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sum_n g(n)\varphi(x-n)dx$$

- Soit:

$$w(2,b) = \sqrt{2} \sum_n c(b+n)g(n)$$

La TOC à 2D

- Définition :

$$w(a,b_x,b_y)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\psi\left(\frac{x-b_x}{a},\frac{y-b_y}{a}\right)dxdy$$

- Effets directionnels : fonction 5D
- Reconstruction : non unicité
- Echantillonnage espace / échelle : dyadicité
- Décomposition de la fonction ondelette

$$\frac{1}{4}\psi\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)=\sum_{n,m}g(n,m)\varphi(x-n,y-m)$$

Fonctions d'échelle

- Fonction d'échelle et équation de dilatation

$$\frac{1}{4}\varphi\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \sum_{n,m} h(n,m) \varphi(x-n, y-m)$$

- Fonctions et filtres $h(n,m)$
 - Sinus cardinal et fonctions associées
 - Fonctions à support compact : B-splines
- Approximation par une suite translatée

$$c(0, k, l) = \langle f(x), \varphi(x-k, y-l) \rangle$$

L'algorithme à trous

- Pavé de résolution

$$c(i,k,l) = \langle f(x,y), \frac{1}{4^i} \varphi\left(\frac{x-k}{2^i}, \frac{y-l}{2^i}\right) \rangle$$

- Récurrence sur les approximations

$$c(i+1,k,l) = \sum_{n,m} h(n,m) c(i,k+n2^i, l+m2^i)$$

- Récurrence sur les coefficients en ondelettes

$$w(i+1,k,l) = \sum_{n,m} g(n,m) c(i,k+n2^i, l+m2^i)$$

Choix des filtres

- Filtres associés à la TOD
 - Filtres orthogonaux : très limités
 - Filtres biorthogonaux : c'est mieux
 - La redondance implique un choix très large
- Séparation des variables : gaussienne
- Compacité et régularité : B-splines
- Choix de l'ondelette
 - Différence de B-spline
 - Similarité avec la pyramide de laplaciens
- Reconstruction : non unique

Fonctions B-splines centrées

- Passage dans l'espace de Fourier

$$\hat{B}(v) = \sin c^{l+1}(v)$$

- TF du filtre associé :

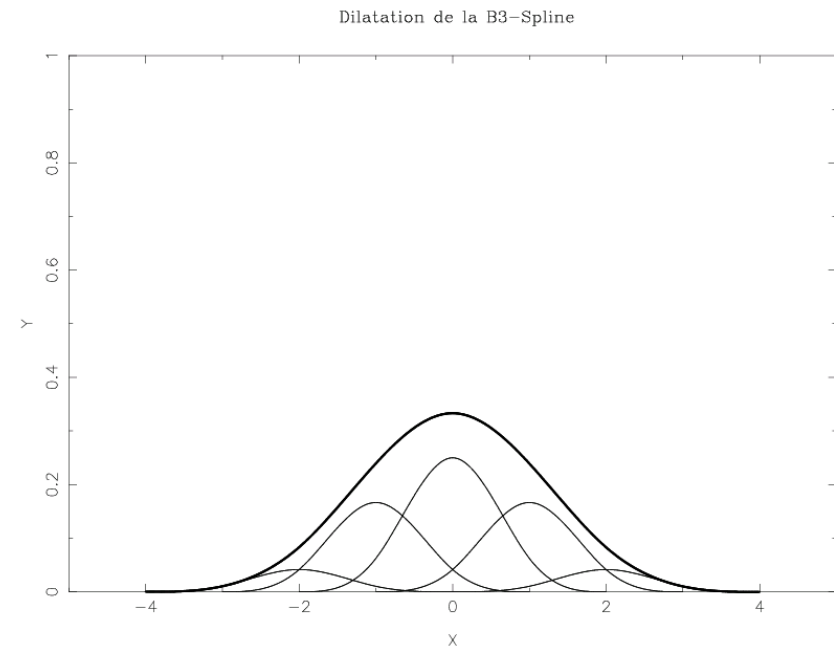
$$\hat{h}(v) = \left[\frac{\sin c(2v)}{\sin c(v)} \right]^{l+1} = \cos^{l+1}(v)$$

- Filtre binomial

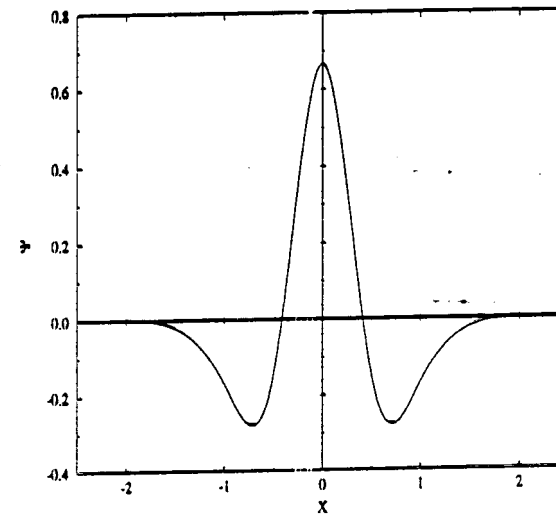
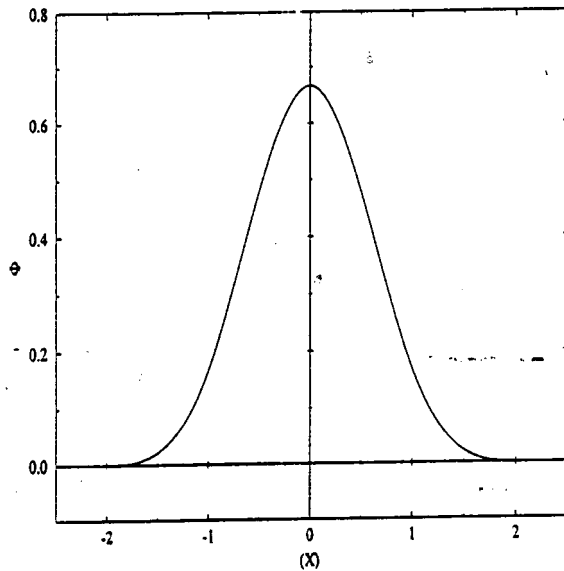
$$h(n) = \frac{1}{2^{l+1}} C_{l+1}^{l+1-n}$$

- Exemple du B-spline cubique

$$h(n) = \frac{1}{16} C_4^{2-n}$$



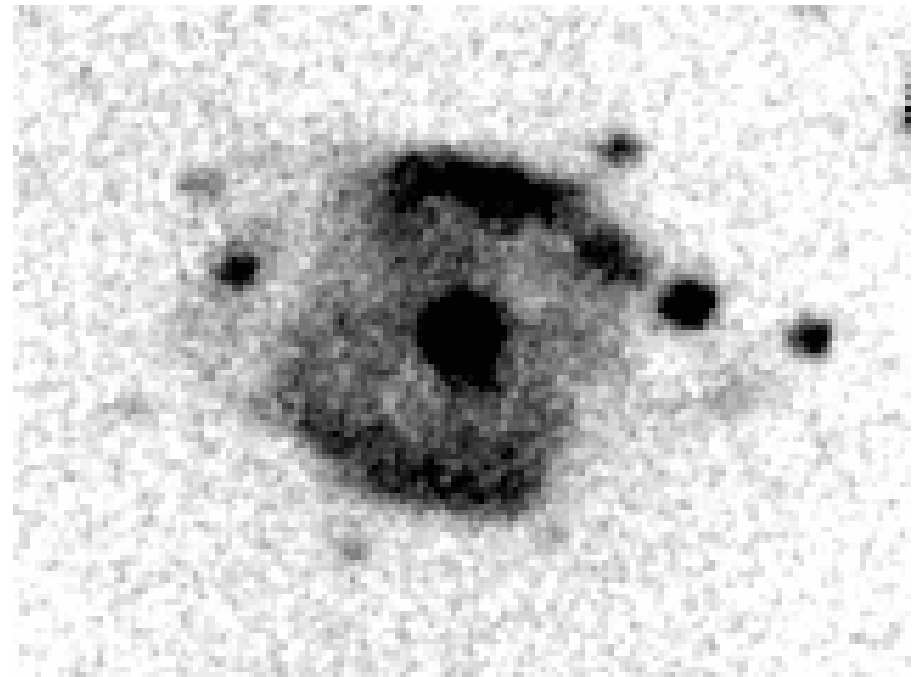
Les fonctions utilisées (1D)



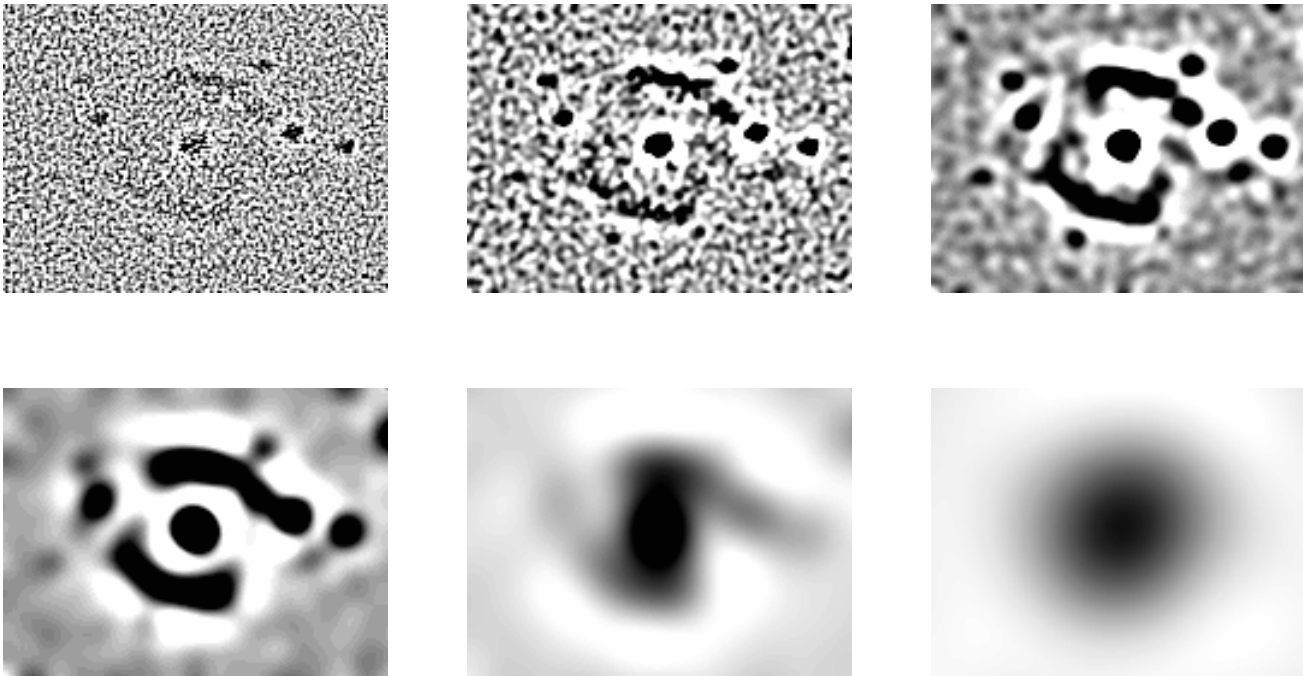
Fonction d'échelle – Fonction Ondelette

Exemple sur une nébuleuse

Image IR de la
nébuleuse
planétaire NGC40
prise au foyer du
télescope de
1m93 de
l'Observatoire de
Haute Provence
Taille 160x120



Transformée de l'image



On voit bien des structures qui semblent physiques

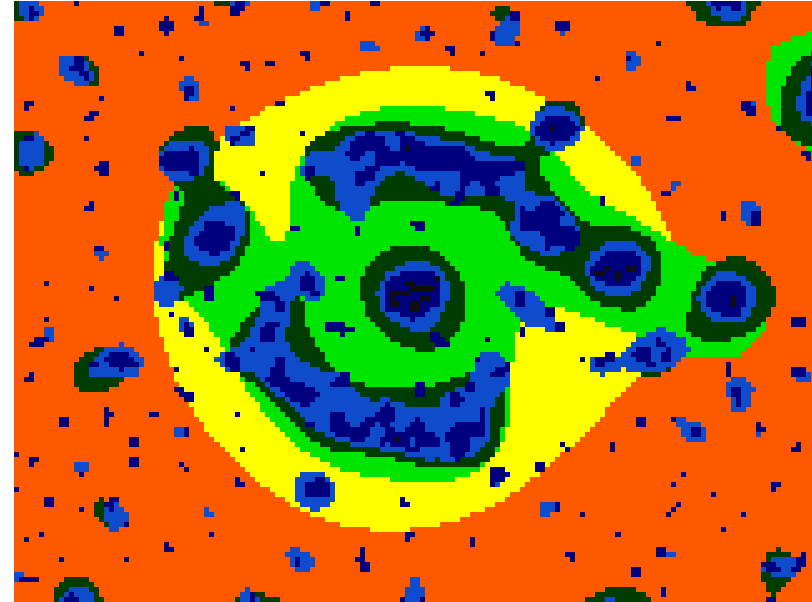
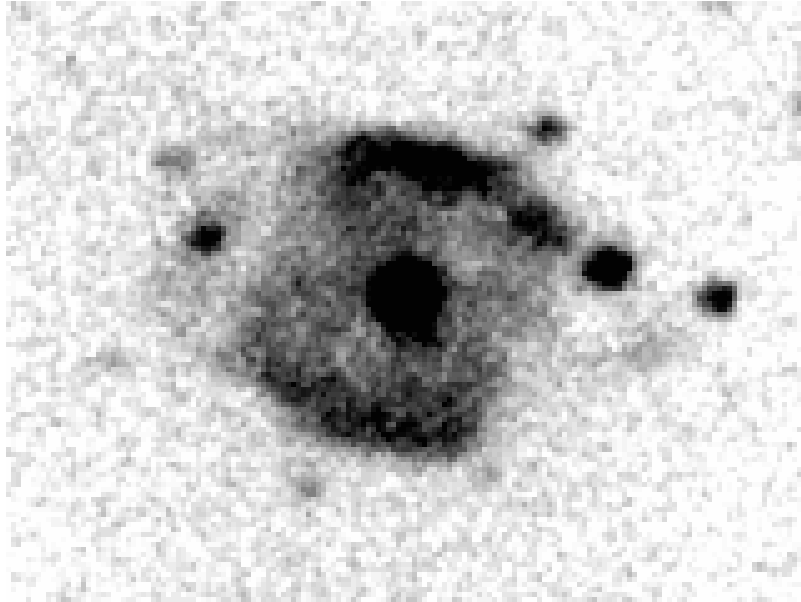
Coefficients significatifs

- H_0 : hypothèse que l'image est localement constante à l'échelle de l'ondelette associée
- Rejet de cette hypothèse (cas $w > 0$):

$$\Pr ob [W > w (i, k, l)] < \varepsilon$$

- Choix du seuil d'incertitude ε :
 - Confiance dans la détection d'un phénomène
 - Nombre d'artéfacts tolérés
 - Nombre de détections manquées
 - Un bon compromis ε autour de 10^{-3}

Le masque multirésolution



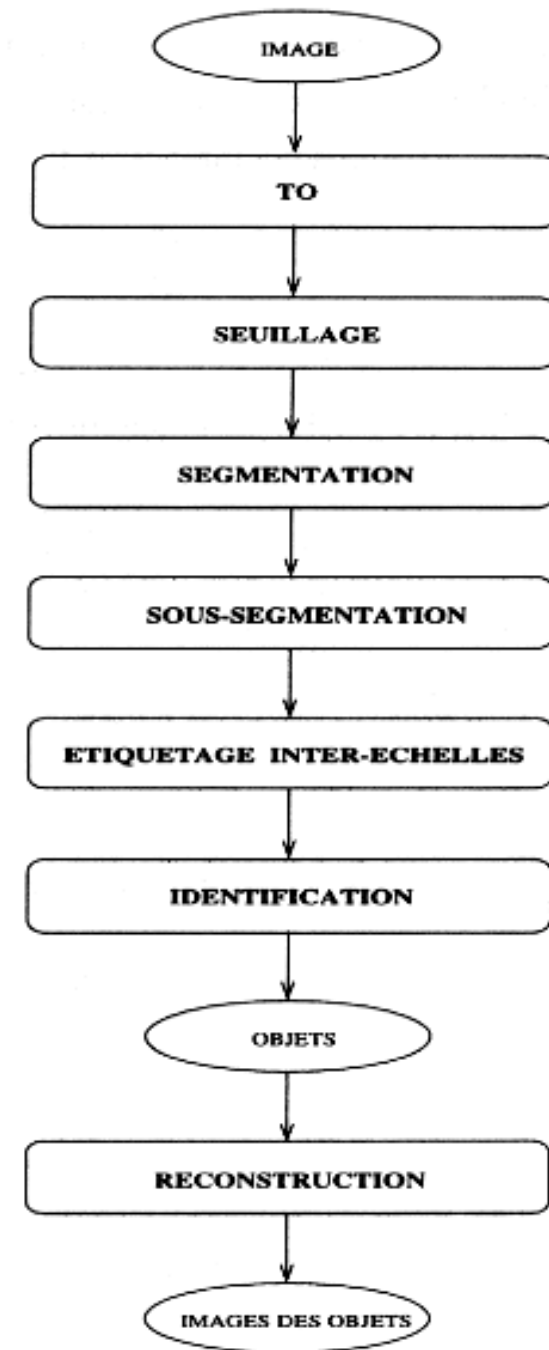
- Le bruit est calculé à partir de la transformée à la première échelle avec une méthode itérative de rejet
- En raison de l'isotropie de l'ondelette les structures allongées sont fragmentées

Objets et Coefficients

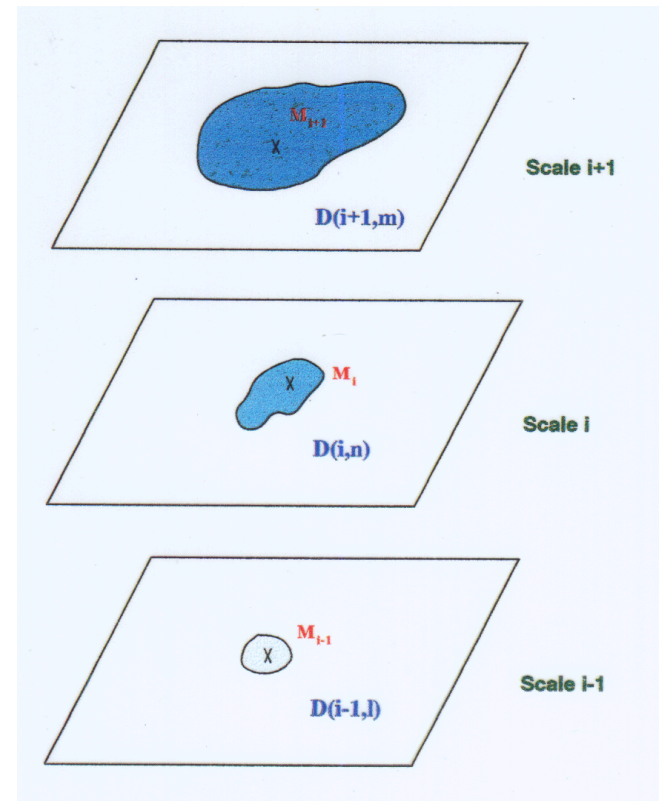
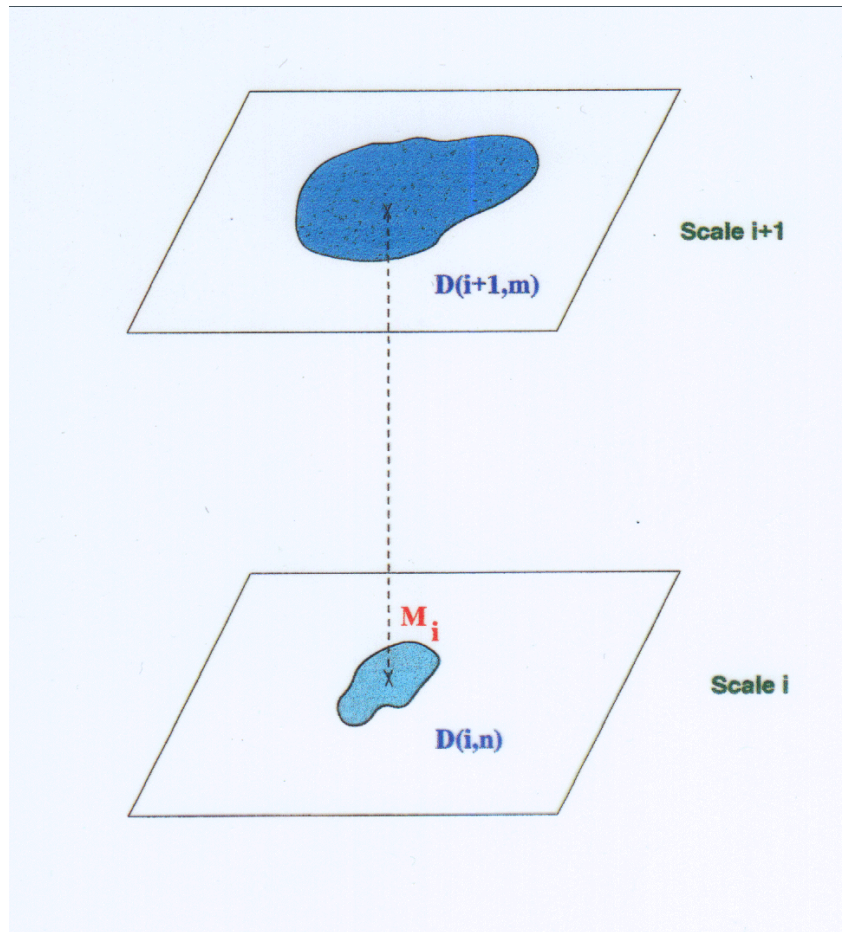
- Absence de dualité Objet / Coefficient
 - Les objets physiques n'ont pas la forme d'une ondelette ni d'une fonction d'échelle
- Un objet est associé à plusieurs plans en ondelettes
- Un pourcentage important des coefficients n'est pas significatif
- Il faut pouvoir reformer les images des objets à partir des coefficients

Vision Multiéchelle

- Algorithme à trous : Conservation de la géométrie à chaque échelle
- Segmentation de l'espace en ondelettes
 - Sélection des coefficients significatifs
 - Etiquetage des régions connexes à chaque plan
 - Relation inter-échelle entre les domaines
 - Construction d'une arborescence
 - Objet : maximum d'énergie le long de l'arbre
 - Sous-arbre et volume associés
- Reconstruction de l'image de chaque objet

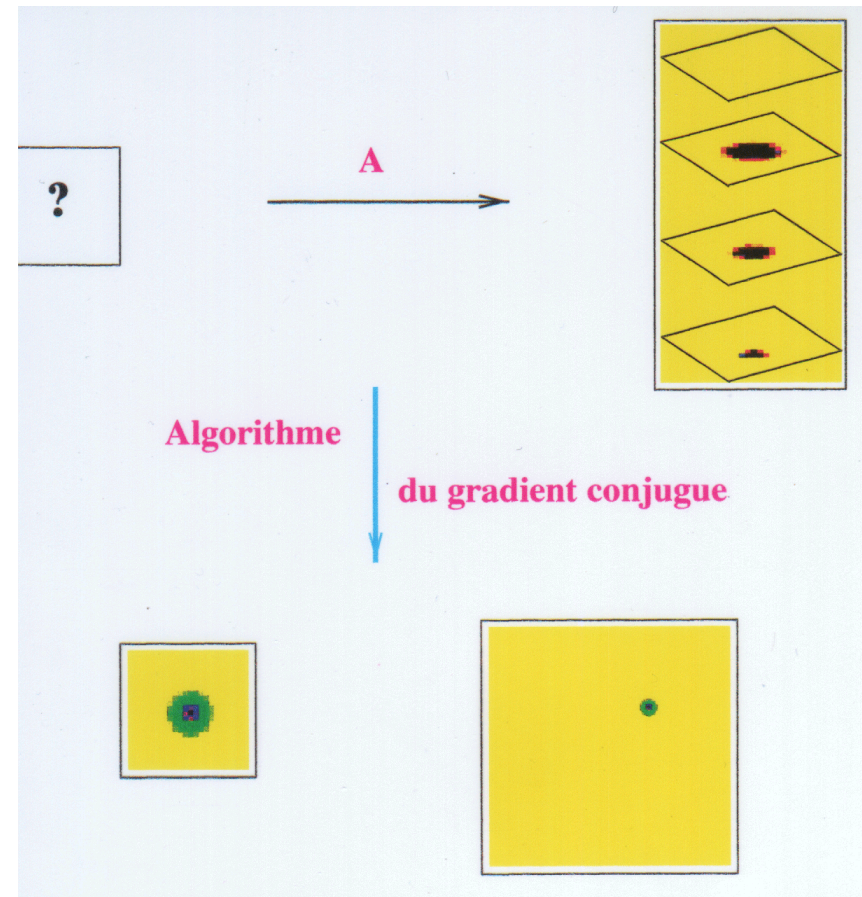


Relation entre échelles et définition des objets



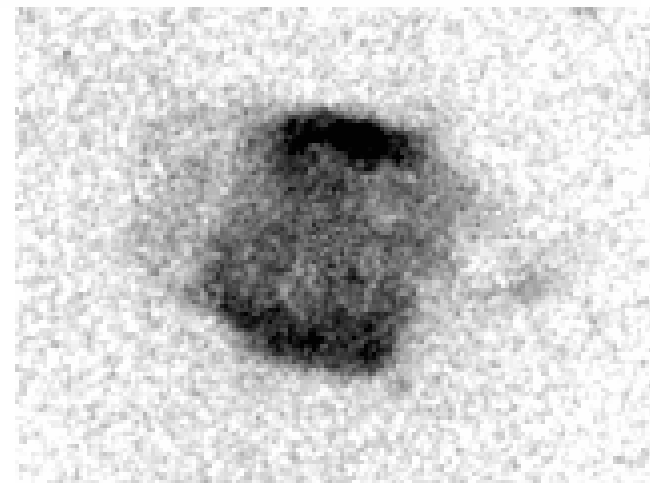
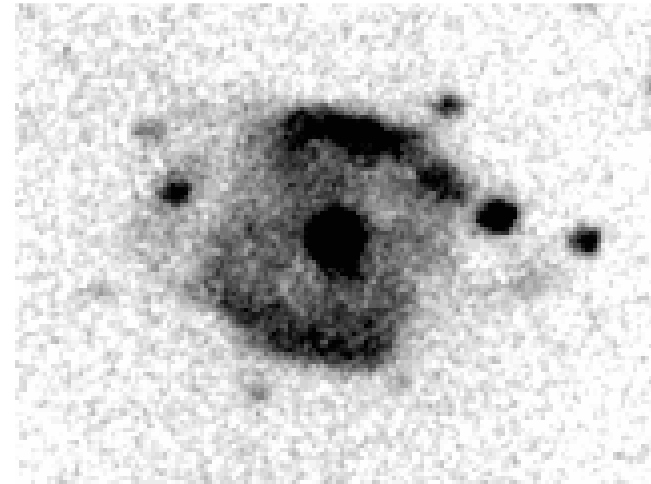
Reconstruction des objets

- Reconstruire une image à partir d'une sélection des coefficients
- Contrainte de minimisation de l'énergie
- Contrainte de positivité
- Algorithme du gradient conjugué

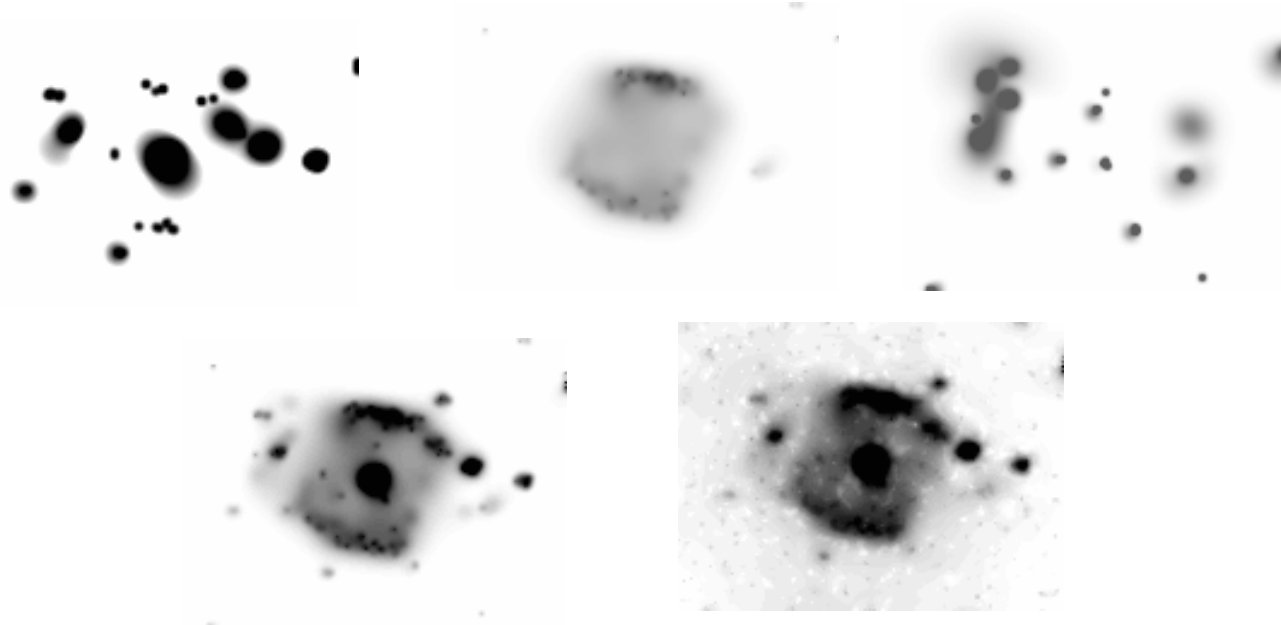
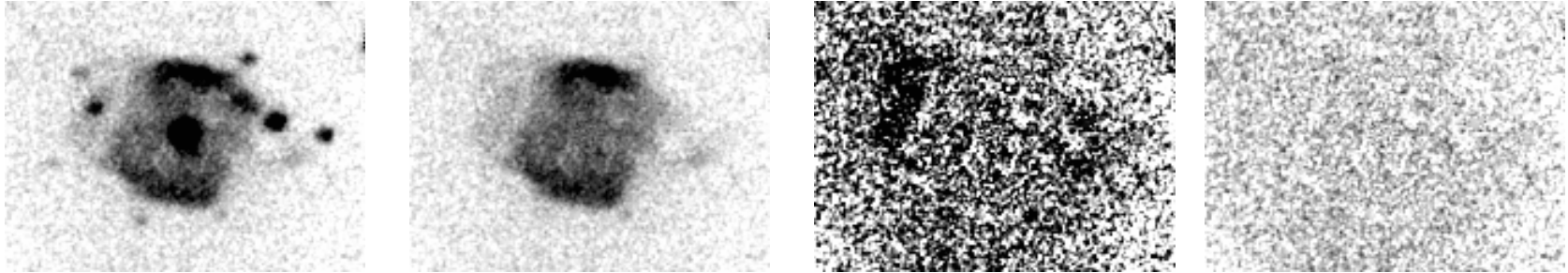


Extraction des objets

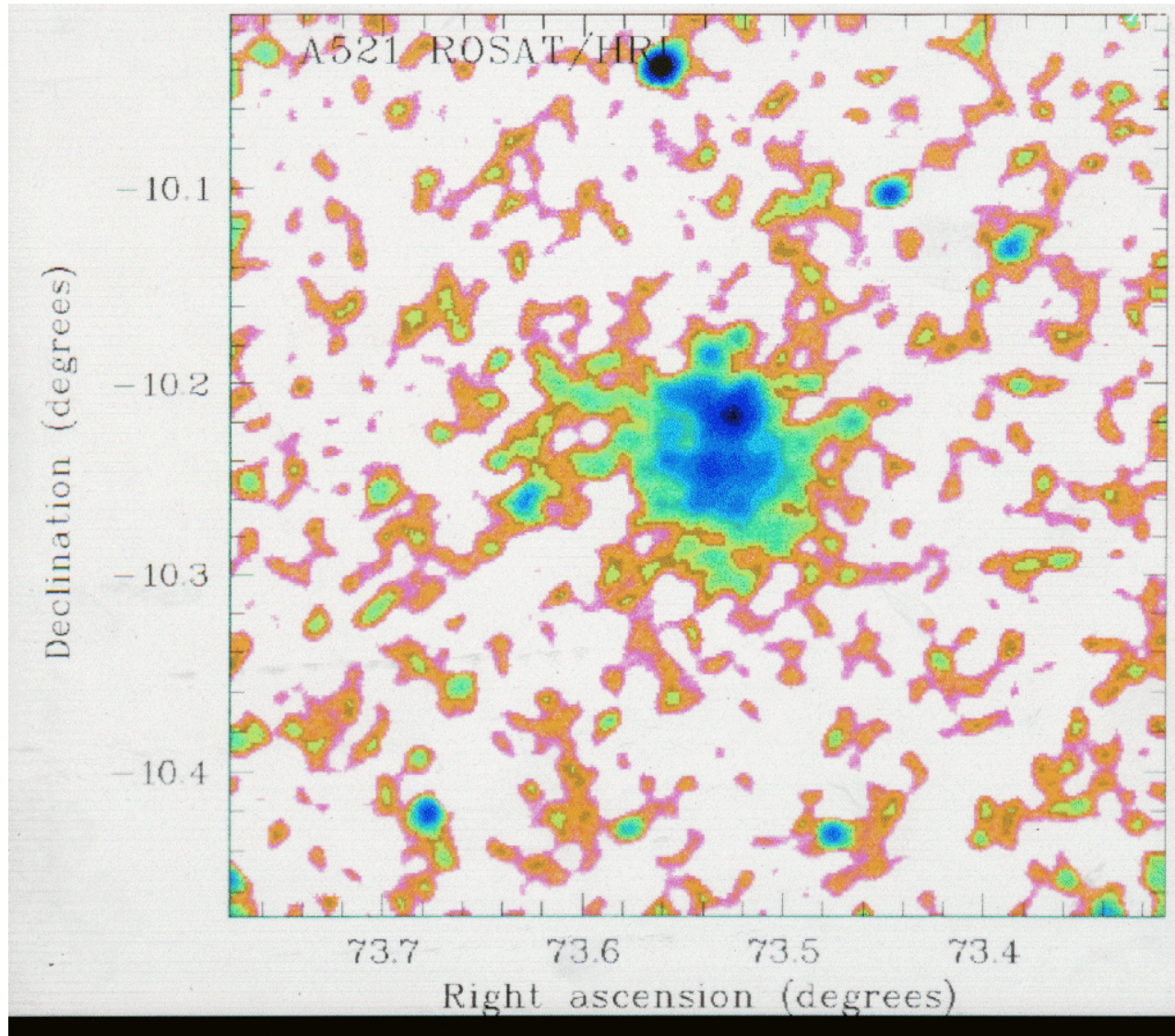
- Seuil à 4σ
- On n'utilise que 5 échelles
 - Taille de l'image
- Les coquilles ne sont pas vues:
 - Il faudrait aller à des échelles plus grandes
- Les petits objets peu allongés sont bien extraits



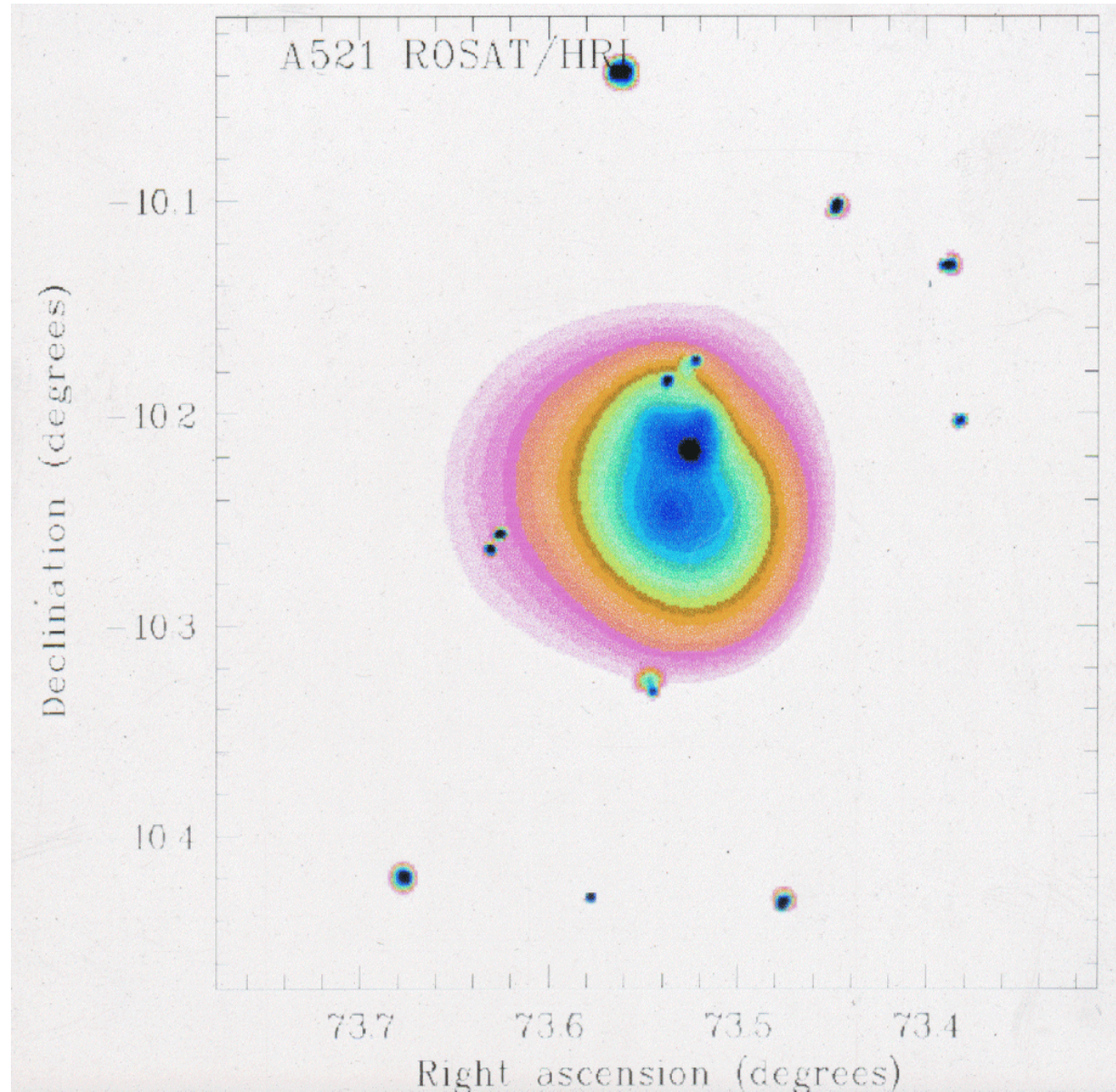
Itérations



Amas de galaxies A521 en X



MVM sur Abel 5121



Mise en
évidence d'un
structure
plongeant
vers le cœur
de l'amas

