LA ROTATION INTERNE DU SOLEIL DÉDUITE DE L'HÉLIOSISMOLOGIE

Thierry Corbard
Observatoire de la Côte d'Azur
Département Cassini, UMR 6529 du CNRS
BP 4224 - 06304 Nice Cedex 4
e-mail: corbard@obs-nice.fr

Table des matières

1 Introduction

Le but de ce cours est de montrer comment les observations héliosismologiques permettent, par résolution d'un *problème inverse*, d'étudier la rotation des couches internes du soleil. Pour cela, je replacerai tout d'abord les observations modernes dans le contexte historique de l'observation de la surface solaire et des études théoriques des oscillations stellaires en montrant comment les deux aspects, observationnels et théoriques, se sont combinés à partir du milieu de notre siècle pour ouvrir la nouvelle perspective de la connaissance de la dynamique interne de notre étoile dont je présenterai les principaux enjeux scientifiques.

Je reprendrai ensuite brièvement (§2) la partie de l'étude théorique des oscillations non radiales du soleil qui permet de faire le lien entre l'observation des modes à la surface et la rotation interne, en soulignant et en justifiant les hypothèses utilisées pour cette étude.

Les §§3 et 4 montreront comment la forme des *noyaux de rotation* issus du modèle solaire ainsi que les éventuelles limitations observationnelles peuvent conduire à des formulations différentes du problème inverse.

Les deux principales techniques d'inversion, locale et globale, seront détaillées et comparées §5, et enfin les principaux résultats obtenus ainsi que les perspectives seront présentés §§6 et 7.

Des compléments à ce cours pourront être trouvés notamment dans les revues récentes de Gough (1996), Sekii(1997) et Thompson (1995, 1998).

1.1 Historique

1.1.1 Observations de la rotation de surface

L'histoire des premières observations de la rotation solaire (voir Tassoul 1978, Chap. 1.1) est intimement liée à celle de l'observation des taches solaires. Cependant, alors que depuis l'antiquité plusieurs auteurs font état d'observations de taches sur le soleil (voir Bray & Loughhead 1964, Chap. 1.1), il faut attendre le développement par Galilée (1564-1642) de la lunette astronomique à partir de 1609 pour que Johannes Goldschmidt (1587-1615), plus connu sous le nom latin de Fabricius, puis Galilée établissent que ces taches sont bien des phénomènes localisés à la surface du soleil et non pas, par exemple, l'ombre portée de planètes passant devant le disque solaire, thèse défendue initialement par le père jésuite Christopher Scheiner (1575-1650) à partir de ses propres observations. Ainsi Fabricius et Galilée ouvraient, il y a un peu moins de 4 siècles, la voie pour l'observation de la rotation solaire en remettant en cause la cosmologie d'Aristote (384-322 av. J.C.) et de Ptolémée (100-170 av. J.C.) conférant un caractère immuable et parfait (sans 'tache') aux astres en général et au soleil en particulier. Cette doctrine étant défendue par l'église catholique Romaine, la position de Galilée sur la nature des taches solaires jouera un rôle important dans la suite des évènements qui le conduiront à être condamné par l'inquisition Romaine en 1633. Par la suite, les observations minutieuses du père Scheiner (rallié à l'interprétation de Galilée) permirent d'établir, dès 1630, (voir **Fig. 1**) que la période de rotation du soleil était d'environ 27 jours à l'équateur et que les taches, observées à de plus hautes latitudes (jusqu'à 30° autour de l'équateur), semblaient se déplacer plus lentement.

Ensuite survint la période (1645-1715) dîte du *minimum de Maunder* correspondant, sur terre, au *"mini age glaciaire"* durant lequel très peu ($\simeq 15$) de taches solaires furent observées ce qui permettra, par la suite, de faire un lien entre l'activité solaire et le climat terrestre. Ce n'est qu'au milieu du dix-neuvième siècle que les premières observations seront confirmées par Richard Carrington (1826-1875) et Gustav Spörer (1822-1895). Ils montrent, indépendamment, que le soleil ne tourne pas comme une sphère rigide: les régions équatoriales tournent plus vite que les zones polaires. En prenant en compte le mouvement de la terre autour du soleil, Carrington trouve une *période sidérale* (les étoiles servant de repère, et non la terre) de 24,96

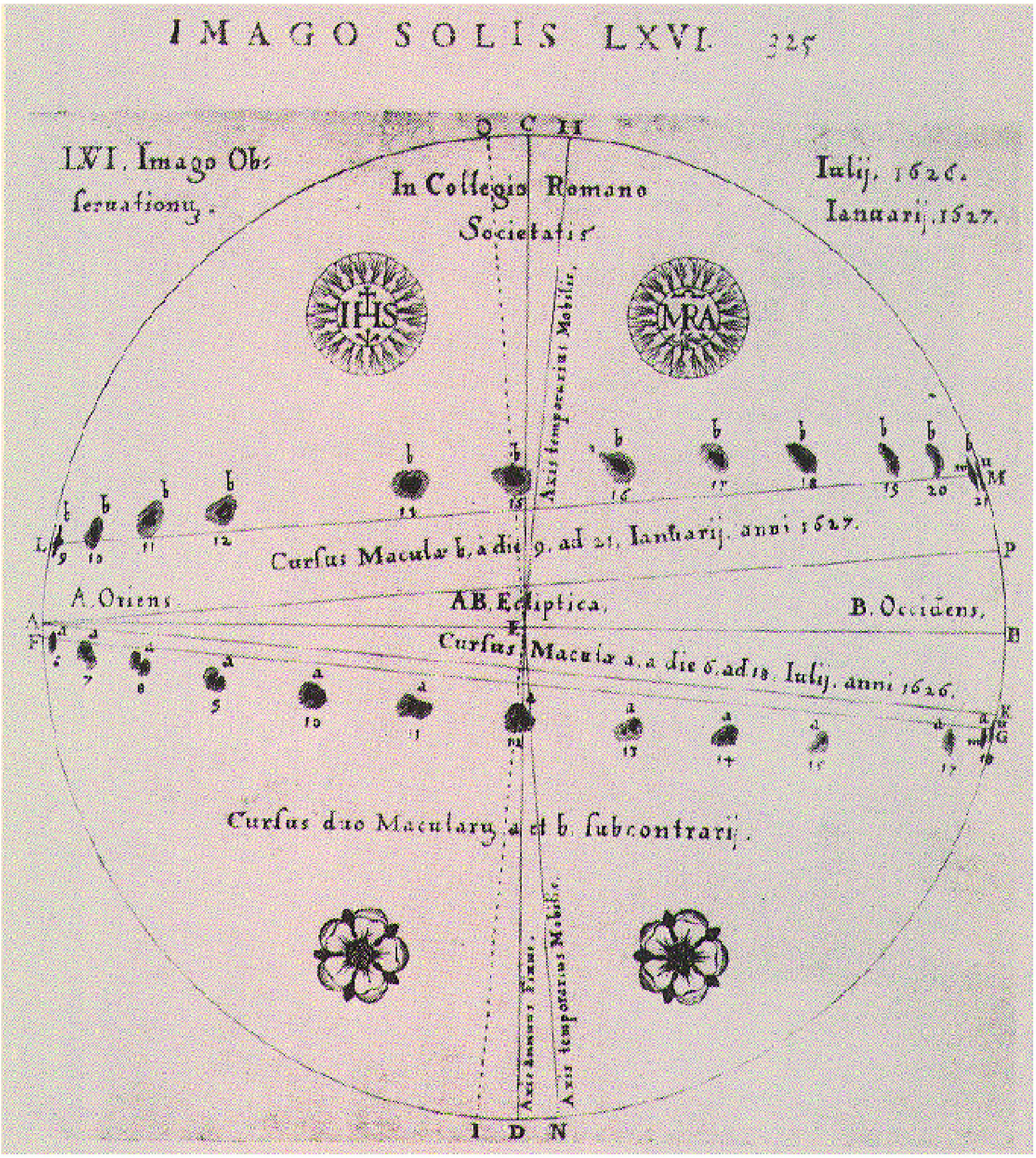


FIG. 1 – *Observations quotidiennes de la rotation avec le Soleil de deux taches ou groupes de taches (a, en 1626; b, en 1627) publiées par Scheiner en 1630 dans un manuscrit intitulé Rosa Ursina. Ses observation détaillées lui permirent également de déduire que l'axe de rotation du Soleil est légèrement incliné par rapport au plan de l'écliptique.*

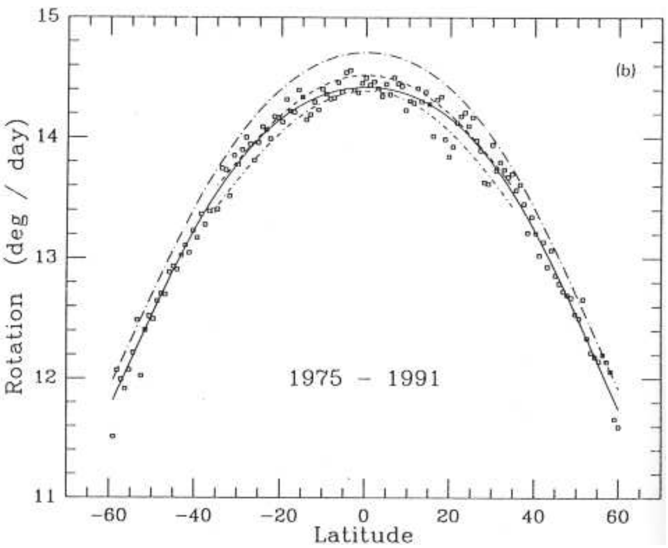


FIG. 2 – *Rotation sidérale moyenne en fonction de la latitude. Les carrés représentent les observations de petites structures magnétiques et la ligne pleine l'approximation par un polynôme de ces observations. Vitesses de rotation d'autres traceurs: supergranules (—·—·—·), groupes de taches (-·-·-·-·-·), taches individuelles (--------). D'après Komm et al. (1993)*

jours à l'équateur et propose une loi empirique pour la dépendance de la rotation en fonction de la latitude héliocentrique ϕ:

$$\Omega(°/jrs) = 14°42 - 2°75 \sin^{\frac{7}{4}} \phi \tag{1}$$

Cette loi décrivant la *rotation différentielle* à la surface du Soleil sera corrigée par Hervé Faye (1814-1902) qui trouve la formule

$$\Omega(°/jrs) = 14°37 - 3°10 \sin^2 \phi \tag{2}$$

plus adaptée. Cette *loi de Faye* restera utilisée jusqu'au milieu du vingtième siècle.

L'étape suivante fut franchie grâce à la découverte en 1842 de l'effet Doppler (Christian Doppler (1803-1853)). Armand-Hyppolyte Fizeau (1819-1896) montra en 1848 que la mesure du décalage Doppler des raies spectrales donnait accès à la détermination de la vitesse radiale des étoiles. Ces techniques de spectroscopie (visuelle) permirent à Herman Vogel (1841-1907), Nils Dunér (1839-1914) et Jakob Halm (1866-1944) de confirmer la loi de Faye et d'étendre sa validité jusqu'à des latitudes de 60°.

A partir du début du vingtième siècle deux axes principaux sont poursuivis pour la détermination de la rotation de surface du soleil (voir par exemple les revues de Howard (1984), Schröter (1985) et Meunier (1997)):

- La spectrographie développée à partir de 1906 à l'observatoire du Mont Wilson par Walter S. Adams (1876-1956) et George E. Hale (1868-1938) remplace les observations visuelles. Cette technique permet de déterminer la rotation de toutes les zones de la surface par observation du décalage Doppler de raies spectrales produites au niveau de la photosphère mais pose des problèmes instrumentaux et de calibration importants (Snodgrass et al. 1984, Ulrich et al. 1988, Hathaway et al. 1996).

- Parallèlement, on poursuit le suivi des *traceurs de surface* (taches, groupes de taches, supergranules, structures magnétiques, etc..) (**Fig. 2**) qui pose moins de problèmes instrumentaux mais nécessitent que les traceurs soient présents (on observe pas de taches par exemple aux hautes latitudes). De plus ces mesures sont plus difficiles à interpréter en terme de rotation. En effet, alors que les observations spectrographiques correspondent à la rotation de couches localisées dans la photosphère qui a une épaisseur de quelques centaines de kilomètres seulement, les différents traceurs observés en surface peuvent être guidés à diverses profondeurs dont l'estimation est difficile sans une compréhension complète de la physique de chaque traceur.

1.1.2 Détermination de la rotation interne

Les débuts de la recherche concernant la détermination de la rotation interne du soleil sont marqués par un entrelacement des travaux théoriques et observationnels se stimulant mutuellement. Je rappellerai seulement quelques moments clefs de cette histoire.

L'étude théorique des *oscillations non radiales* des étoiles menée par Ledoux (1951) lui permet d'établir une formule donnant la structure fine du spectre des oscillations induite par une rotation rigide de l'étoile avec une vitesse angulaire Ω_o. Chaque *mode acoustique* (voir le cours de G. Berthomieu) est caractérisé par 2 nombres quantiques, *l'harmonique sphérique* l et *l 'ordre radial* n, et se démultiplie sous l'effet de la rotation en $2l+1$ pulsations différentes identifiées par *l'ordre azimutal* $m = -l, -l+1, ..l$ et reliées entre elles par:

$$\omega_{nlm} = \omega_{nl0} - m\ C_{nl}\ \Omega_o, \qquad (m = -l, -l+1, .., l) \tag{3}$$

où C_{nl} est une constante dépendant du modèle de l'étoile et du mode considérés. La différence $\omega_{nlm} - \omega_{nl0}$ est couramment nommée par le terme anglo-saxon de *'splitting' rotationnel.* Le coefficient C_{nl}, calculé dans un repère tournant à la même vitesse que l'étoile, est appelé *terme de Coriolis.* Pour un observateur extérieur, situé dans un repère galiléen, un terme d'entraînement ou *terme d'advection* provenant simplement du fait que la longitude observée φ_{obs} augmente uniformément avec le temps vient s'ajouter au terme de Coriolis:

$$\varphi_{obs} = \varphi + \Omega_o t \Rightarrow cos(m\varphi - \omega t) = cos(m\varphi_{obs} - (\omega + m\Omega_o)t) \Rightarrow \omega_{obs} = \omega + m\Omega_0 \tag{4}$$

Dans un repère d'inertie la pulsation d'un mode (n, l, m) pour une étoile en rotation rigide s'exprime donc:

$$\omega_{nlm} = \omega_{nl0} + m\ (1 - C_{nl})\ \Omega_o, \qquad (m = -l, -l+1, .., l) \tag{5}$$

En 1960 Leighton, Noyes et Simon (Leighton 1960, Leighton et al. 1962) observent pour la première fois que la surface solaire est couverte de zones animées de mouvements oscillants verticaux ayant une période proche de 5mn et des amplitudes allant de quelques centimètres à plusieurs centaines de mètres par seconde. Ces oscillations, nommées *oscillations de 5mn du soleil*, ont été, dans un premier temps, interprétées comme étant la manifestation *locale* de la pénétration de cellules convectives (observée sous forme de *granules*) à l'intérieur de la photosphère stable. Ce n'est que quinze ans après la découverte des oscillations solaire de 5mn, que Deubner (1975) réussit à les résoudre en modes discrets qui se révèleront être la superposition de *modes globaux* d'oscillation du soleil. Par comparaison avec les calculs théoriques effectués à partir de modèles solaires, Ando et Osaki (1975) identifieront ces modes comme étant des modes acoustiques correspondant à des harmoniques sphériques élevés ($l = 200 - 1000$).

En 1967, Lynden-Bell et Ostriker ont établi un *principe variationnel* pour les étoiles en rotation. Ce principe permet, au premier ordre en Ω/ω, de calculer les fréquences des modes d'oscillation d'une étoile en rotation à partir de la seule connaissance des fonctions propres déduites d'un modèle sans rotation. Il a été utilisé par Hansen et al. (1977) et Gough (1981) pour élargir la formule obtenue par Ledoux au cas des étoiles qui, comme le soleil, présentent un profil de rotation $\Omega(r, \theta)$ dépendant à la fois du rayon r et de la colatitude $\theta = \pi/2 - \phi$ (cf. §2).

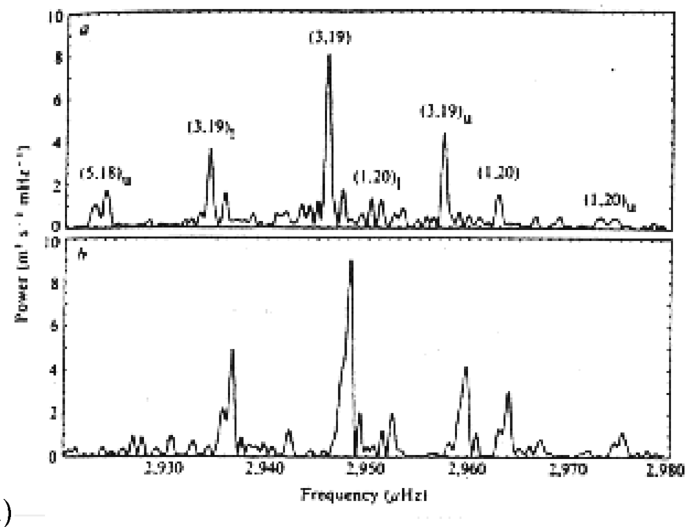
La première vérification expérimentale de la réalité du splitting rotationnel fut obtenue sur les modes normaux de vibration de la terre excités par un tremblement de terre chilien (Pekeris et al. 1961). La possibilité de l'observer dans le contexte solaire fut énoncée (Brookes et al. 1976) et la première observation fut obtenue en 1979 pour les oscillations solaires d'harmoniques sphériques élevés ($l \simeq 200$) qui ne sondent que quelques pour cents du rayon solaire (Deubner et al. 1979).

Les modes de bas degrés ont été mis en évidence pour la première fois par Claverie et al. (1979) puis avec une meilleure résolution temporelle par Grec et al. (1980) à partir d'observations ininterrompues couvrant une période de 120 heures réalisées au pôle sud. Dès 1981, Claverie et al. pensent avoir mis en évidence l'existence d'une structure fine dans le spectre des modes de bas degrés. La valeur de 0.75μHz du splitting obtenu entre les composantes d'un mode $l = 1$ suggère une rotation du cœur environ deux fois plus rapide que celle observée en surface (Claverie et al. 1981). Néanmoins Gough (1982b) souligne que les mesures ayant été réalisées en disque intégré, seules les composantes $m = \pm 1$ devraient être visibles, le pic $m = 0$ à symétrie équatoriale devant être moyenné. Une explication mettant en jeu un puissant champ magnétique dans le cœur tournant sur un axe différent de celui de la rotation de surface sera avancée (Isaak 1982) mais ne permettra pas de résoudre le problème de manière satisfaisante (Gough 1982a). Finalement, bien qu'elles ne permettent pas de résoudre le splitting, les observations réalisées au pôle sud indiqueront que cette première structure fine résultait probablement d'un artefact d'analyse (Grec et al. 1983). D'autres mesures de splittings rotationnels basées sur l'observation de fluctuations du diamètre solaire seront proposées (Bos et Hill 1983) et seront interprétées comme étant compatibles avec une rotation très rapide du cœur (Hill et al. 1983). Cependant, là encore la méthode d'observation est délicate et les splittings s'avèreront peu fiables. Fin 1983 le splitting rotationnel reste donc non résolu et la balle se trouve dans le camp des observateurs.

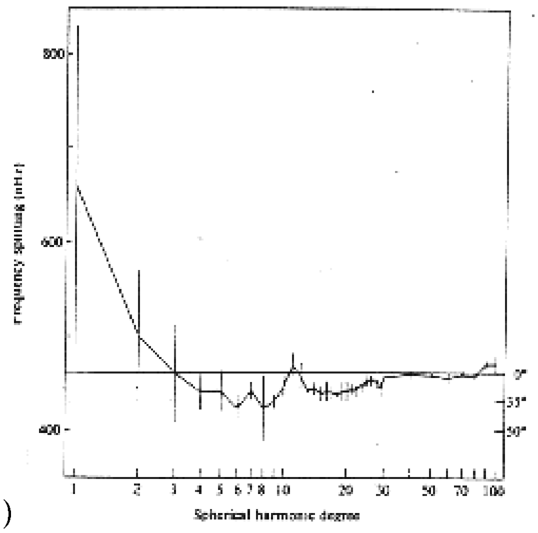
Les premières mesures de splittings clairement identifiés ont été réalisées par Duvall et Harvey (1984) (**Fig. 3a**). Se basant sur des observations spatialement résolues faites à Kitt Peak en 1983, ces auteurs obtiennent une estimation des splittings de 180 modes sectoraux ($m = l$) ayant des degrés l compris entre 1 et 100 (**Fig. 3b**). Ils exploitent immédiatement ces observations (Duvall et al. 1984) en utilisant trois méthodes d'inversion différentes qui leur permettent d'obtenir la première estimation du profil de la rotation solaire équatoriale entre 0.4 et $0.9 R_\odot$ (**Fig. 4**): la rotation obtenue demeure pratiquement constante entre la surface et $0.6 R_\odot$ puis décroît entre 0.6 et $0.4 R_\odot$. Pour le cœur, ce travail semble indiquer une rotation deux fois plus rapide qu'en surface mais les larges incertitudes sur les observations des splittings de bas degrés (**Fig. 3b**) ne permettent pas, là encore, de se prononcer de manière significative sur la rotation centrale.

A partir de 1980 la nouvelle communauté des physiciens héliosismologues développe des réseaux d'observatoires au sol (IRIS[1], BiSON[2], GONG[3], TON[4], voir la revue de Pallé (1997)) et des instruments embarqués à bord de satellites (PHOBOS, SoHO[5], voir la revue de Toutain (1997)) afin d'améliorer la résolution et la précision accessibles. Parallèlement les techniques d'inversion, initialement utilisées par Duvall et al. (1984) et faisant l'objet de ce cours, sont développées pour déterminer la rotation interne non seulement dans le plan équatorial (méthodes 1D) mais aussi selon deux dimensions (rayon et latitude, méthodes 1.5D et 2D).

1. International Research on the Interior of the Sun, http://boulega.unice.fr
2. Birmingham Solar Oscillations Network, http://bison.ph.bham.ac.uk
3. Global Oscillations Network Group, http://helios.tuc.noao.edu/gonghome.html
4. Taiwan Oscillations Network
5. Solar and Heliospheric Observatory, http://sohowww.nascom.nasa.gov



a)



b)

FIG. 3 – *Premières observations par Duvall et Harvey (1984) des splittings rotationnels des modes acoustiques du Soleil.* (**a**) *Spectre d'un mode $l = 3$ $n = 19$ décomposé en un mode prograde ($m = 3$, cadre du bas) et un mode rétrograde ($m = -3$, cadre du haut). Les autres pics proviennent des modes $l = 1$ et $l = 5$ et des harmoniques du jour à $11.6\mu Hz$ (indicés u et l).* (**b**) *Valeurs du splitting sectoral ($m = l$) en fonction du degré observé. Les indications de latitudes correspondent aux observations de structures magnétiques en surface menées par Snodgrass (1983).*

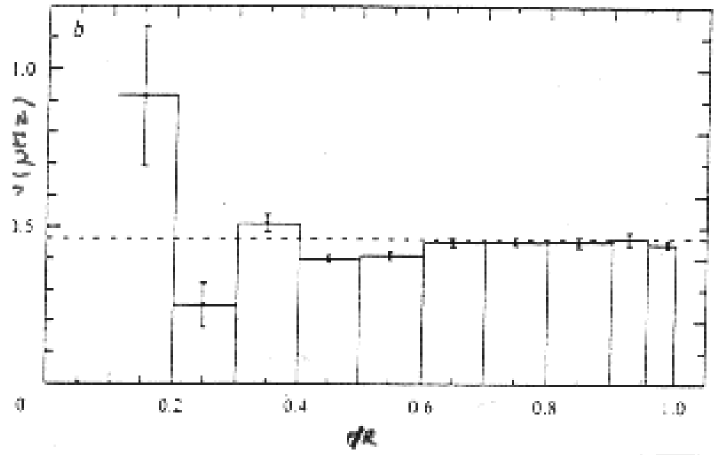


FIG. 4 – *Première inversion des premiers splittings rotationnels observés: fréquence de rotation équatoriale (en μHz) en fonction du rayon solaire. D'après Duvall et al. (1984)*

1.2 Enjeux

Si les moyens mis en œuvre depuis 20 ans pour l'étude des oscillations solaires sont si importants, c'est que les enjeux scientifiques sont très nombreux. Je rappellerai ici seulement les principaux enjeux liés à notre compréhension de la dynamique des étoiles et à son évolution dans le temps.

Les informations sur la rotation du cœur et de la zone radiative que l'on peut obtenir par l'héliosismologie permettront de **mieux contraindre les modèles des processus d'évolution et de transport du moment angulaire** (voir par exemple Talon & Zahn 1998 et le cours de P. Kumar). En effet, le soleil est une étoile qui est à peu près au milieu de sa vie et l'observation des étoiles du même type mais plus jeunes a montré que ces étoiles tournent jusqu'à 50 fois plus vite que le Soleil. On pense donc qu'il y a eu, notamment sous l'effet du vent solaire, une perte de moment angulaire durant l'évolution du soleil conduisant à la rotation observée actuellement en surface. La manière dont ce ralentissement affecte les couches internes du soleil est difficile à modéliser car elle dépend fortement de tous les phénomènes de circulation et d'instabilités qui tendent à mélanger l'intérieur et du champ magnétique interne qui peut ralentir ou modifier ce processus.

D'une manière générale **le mélange des éléments chimiques** à l'intérieur d'une étoile est étroitement lié à la rotation de ses couches internes et la connaissance de la rotation peut aider à identifier les processus de transports en jeu (voir par exemple Zahn 1997). Dans le cas du Soleil, un problème qui reste non résolu est celui de la différence importante entre l' **abondance de lithium observée dans la photosphère solaire** et celle relevée dans les météorites. Il semble qu'un mélange induit par la rotation pourrait être à l'origine de la diminution du lithium à la surface du Soleil (voir par exemple Chaboyer 1998).

Un autre problème non résolu est celui du **déficit apparent des neutrinos** générés dans le cœur solaire. Ce problème peut être relié à la dynamique du cœur (voir par exemple Merryfield et al. 1991, Ghosal & Spiegel 1991) qu'il est donc important de mieux connaître.

La connaissance de la rotation de la zone convective peut nous permettre de mieux comprendre comment la rotation et les mouvements de convection turbulente se combinent pour produire la rotation différentielle et la circulation méridienne observées en surface. De plus l'interaction entre la rotation et le champ magnétique est à l'origine de **la dynamo solaire** qu'il est nécessaire de bien modéliser pour comprendre les **cycles de 22 ans des taches solaires et de l'activité magnétique** (voir par exemple Solanki 1993)

Enfin, nous avons vu au §1.1 que la détermination de la dynamique des zones proches de la surface peut mener à une meilleure connaissance de la physique des divers traceurs (taches, structures magnétiques, etc..) observés en surface.

2 Influence de la rotation sur les fréquences d'oscillation

Le but de ce chapitre est de montrer comment on peut relier d'une manière théorique les splittings observés et la rotation interne du soleil en explicitant les hypothèses sous-jacentes à cette étude.

2.1 Équation du mouvement

L'amplitude des oscillations solaires ainsi que les pertes d'énergie sur une période étant faibles, il est possible de se placer dans une approximation adiabatique. Si de plus, on ne tient pas compte de l'interaction entre rotation et convection il est alors possible d'utiliser la théorie linéaire des oscillations adiabatiques (voir par exemple Unno et al. 1989).

On raisonne donc à partir du modèle extrêmement simplifié d'une sphère gazeuse animée d'un mouvement de rotation décrit par un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(r,\theta)$ de direction fixe mais dont le module dépend du rayon r et de la colatitude θ. On utilise la théorie des perturbations pour étudier les oscillations de cette sphère autour de sa position d'équilibre (c.à.d. en rotation mais sans oscillation). Dans ce modèle la vitesse en un point (r,θ,φ) est donné, à l'équilibre, par:

$$\vec{v}_o(r,\theta,\varphi) = \vec{\Omega}(r,\theta) \wedge \vec{r} = \Omega(r,\theta) r \sin\theta \; \vec{e_\varphi} \tag{6}$$

Cette vitesse étant indépendante de la longitude φ et du temps, les hypothèses sous-jacentes sont la symétrie axiale et la stationnarité de l'état d'équilibre. Le fait que l'état d'équilibre soit indépendant du temps permet par ailleurs de séparer les dépendances spatiales et temporelles de toutes les quantités perturbées (densité, pression etc..).

L'effet du champ magnétique sur les oscillations acoustiques étant beaucoup plus faible que l'effet de la rotation on ne considérera ici que les forces de pression P et de gravité (définie par le potentiel gravifique Φ). Dans un repère d'inertie l'équation du mouvement s'écrit donc (équation d'Euler ou de Navier-Stockes sans viscosité):

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} \Phi \tag{7}$$

où ρ est la densité et $\frac{D}{Dt}$ représente la *dérivée particulaire* définie par:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla} \tag{8}$$

Cet opérateur appliqué à une grandeur liée à la particule fluide exprime la variation pendant l'unité de temps de cette grandeur due non seulement à l'évolution du temps, mais également au déplacement de la particule en fonction du temps. Dans le repère d'inertie, l'effet de la rotation apparaît dans le *terme inertiel* $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$. Pour un observateur terrestre, on peut assimiler la terre à un point en rotation autour du soleil avec une vitesse angulaire Ω_T=1/(365 jours) $\simeq$ 31.7nHz. Dans ce repère en rotation (non galiléen) l'équation de la dynamique des fluides s'écrit:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + 2\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v} + \vec{\Omega}_T \wedge \vec{\Omega}_T \wedge \vec{r} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla}\Phi \tag{9}$$

où $\frac{D}{Dt}$ et $\vec{v}$ sont maintenant relatifs au repère en rotation. Cette équation s'obtient simplement en remplaçant $\vec{v}(r,\theta,\varphi,t)$ par $\vec{v}(r,\theta,\varphi-\Omega_T t,t)+\vec{\Omega}_T \wedge \vec{r}$ dans (7). La vitesse angulaire $\Omega(r,\theta)$ de l'équation (6) représente maintenant la *vitesse angulaire synodique du soleil* (c.à.d. vue depuis la terre) alors que la *vitesse angulaire sidérale du soleil est* $\Omega(r,\theta)+\Omega_T$.

L'expression dans un repère tournant permet de donner une interprétation plus physique du terme inertiel. En effet si l'on suppose que le soleil est animé d'une rotation rigide Ω_o alors l'équation (9), avec Ω_o à la place de Ω_T, donne l'équation du mouvement dans un repère tournant avec le soleil et le terme inertiel apparaît sous la forme de deux 'forces' d'inertie (fictives): la force de Coriolis ($-2\rho\vec{\Omega_o}\wedge\vec{v}$) qui modifie la dynamique et donc les oscillations et qui peut engendrer, des ondes inertielles et de Rossby, et la force centrifuge ($-\rho\vec{\Omega_o}\wedge\vec{\Omega_o}\wedge\vec{r}$) qui influe (faiblement) sur la structure d'équilibre du soleil (voir le cours de M. Rieutord). La distorsion exercée par la 'force' centrifuge sur la structure d'équilibre sans rotation est de l'ordre de $\Lambda \equiv R_\odot^3\bar{\Omega}^2/GM_\odot$ où $M_\odot$ et $R_\odot$ sont la masse et le rayon solaire et $\bar{\Omega}$ représente une moyenne de la rotation $\Omega(r,\theta)$ (voir par exemple Gough 1981). Pour les modes de pression, le rapport entre la fréquence de rotation (de période $\sim$ 1 mois) et la fréquence des oscillations (de période $\sim$ 5mn) est très faible ($\epsilon = \bar{\Omega}/\omega \simeq 10^{-4}$) et Λ est de l'ordre de ϵ^2 si bien que, au premier ordre en ϵ, on peut négliger l'effet de distorsion de la 'force' centrifuge et utiliser à nouveau la théorie des perturbations pour analyser l'effet, dû à la 'force' de Coriolis, de la rotation sur les oscillations acoustiques.

2.2 Principe variationnel pour les étoiles en rotation

Lorsque l'on perturbe le système, on peut alors définir le déplacement lagrangien $\delta\vec{r}(r,\theta,\varphi,t)$ de la particule fluide qui se serait trouvée en $\vec{r}(r,\theta,\varphi,t)$ à l'instant t dans le fluide non perturbé (voir par exemple Cox 1980, Chap. 5). Cette même particule se trouve donc en $\vec{r}+\delta\vec{r}$ au même instant t dans le fluide perturbé. On fixe la forme de la dépendance temporelle par:

$$\delta\vec{r}(r,\theta,\varphi,t) \equiv \vec{\xi}(r,\theta,\varphi)e^{-i\omega t} \tag{10}$$

ω représentant la pulsation autour de la position d'équilibre. La perturbation lagrangienne de la vitesse est alors donnée par:

$$\delta\vec{v} = \frac{D_o}{Dt}(\delta\vec{r}) \qquad \text{avec:} \quad \frac{D_o}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v_o}.\vec{\nabla} \tag{11}$$

En utilisant la relation de commutation $\delta\frac{D}{Dt} = \frac{D_o}{Dt}\delta$ (Lynden-Bell & Ostriker 1967), l'équation du mouvement perturbé s'écrit pour un observateur terrestre:

$$\frac{D_o^2}{Dt^2}(\delta\vec{r}) + 2\vec{\Omega}_T\wedge\delta\vec{v} + \vec{\Omega}_T\wedge\vec{\Omega}_T\wedge\delta\vec{r} = -\delta\left(\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}\right) - \delta(\vec{\nabla}\Phi); \qquad D_o/Dt \equiv -i\omega + \mathcal{M}; \qquad \mathcal{M} = \vec{v_o}.\vec{\nabla} \tag{12}$$

Les perturbations lagrangiennes de densité, de pression et du potentiel gravifique peuvent s'exprimer comme des fonctions f, g, h du déplacement lagrangien en utilisant respectivement l'équation de continuité, d'adiabaticité et de Laplace:

$$\text{Eq. (11) + équation de continuité:} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\rho = f(\vec{\xi}) \tag{13}$$

$$\text{Eq. (13) + équation d'adiabaticité:} \quad \delta P = c^2\delta\rho \quad \Rightarrow \quad \delta P = g(\vec{\xi}) \tag{14}$$

$$\text{Eq. (13) + équation de Laplace:} \quad \Delta\Phi = 4\pi\rho G \quad \Rightarrow \quad \delta(\vec{\nabla}\Phi) = h(\vec{\xi}) \tag{15}$$

où c représente la vitesse du son et G la constante universelle de la gravitation. Il est alors possible d'exprimer explicitement les fonctions f, g, h et d'en déduire l'expression d'un opérateur intégro-différentiel $\mathcal{L}$ tel que le second membre de l'équation (12) se réduise à $\mathcal{L}(\delta\vec{r})$. De plus, on peut montrer que cet opérateur est linéaire et auto-adjoint (Lynden-Bell & Ostriker 1967). La démonstration de cette propriété suppose que la pression et la densité s'annulent sur la surface du soleil à l'équilibre. Si l'on prend la photosphère comme surface, cette condition n'est pas vérifiée mais la correction qui en résulte est faible pour les modes de pression dont la fréquence

($\sim 3mHz$) est bien inférieure à la fréquence de coupure acoustique de l'atmosphère solaire ($\sim 5mHz$).

L'équation (12) appelée *équation linéarisée du mouvement* peut donc s'écrire:

$$-\omega^2\vec{\xi} - 2i\omega\left(\mathcal{M}\vec{\xi} + \vec{\Omega}_T \wedge \vec{\xi}\right) + \mathcal{M}^2\vec{\xi} + 2\vec{\Omega}_T \wedge \mathcal{M}\vec{\xi} + \vec{\Omega}_T \wedge \vec{\Omega}_T \wedge \vec{\xi} = -\mathcal{L}\vec{\xi} \tag{16}$$

Au premier ordre en Ω, on peut négliger le terme en $\mathcal{M}^2$ ainsi que les deux derniers termes du membre de gauche sachant $\Omega_T < \Omega$. On note que garder ces termes à ce niveau ne serait pas cohérent avec le fait que l'on n'a pas pris en compte la distorsion de la structure d'équilibre par la force centrifuge qui est du même ordre. En projetant (produit scalaire) cette équation sur $\rho_o\vec{\xi}^* dV_o$ (où $*$ dénote le complexe conjugué et $\rho_o dV_o$ la masse contenue dans l'élément de volume dV_o du soleil à l'équilibre) et en intégrant sur le volume du soleil (à l'équilibre), on obtient au premier ordre en Ω :

$$a\,\omega^2 + b\,\omega - c = 0 \quad \text{avec:} \quad \begin{cases} a = \displaystyle\int_{V_o} \vec{\xi}^*.\vec{\xi}\,\rho_o\,dV_o \\ b = 2i\displaystyle\int_{V_o} \vec{\xi}^*.\left(\mathcal{M} + \vec{\Omega}_T\wedge\right)\vec{\xi}\,\rho_o\,dV_o \\ c = \displaystyle\int_{V_o} \vec{\xi}^*.\mathcal{L}\vec{\xi}\,\rho_o\,dV_o \end{cases} \tag{17}$$

On montre, en utilisant le fait que $\mathcal{L}$ est un opérateur auto-adjoint, que les termes a b et c sont réels. Le principe variationnel démontré par Lynden-Bell et Ostriker (1967) établit que lorsque les solutions ω de (17) sont réelles, et c'est le cas pour les oscillations solaires, elles sont également stationnaires par rapport aux variations de $\vec{\xi}$. Autrement dit, la perturbation d'ordre ϵ sur les fonctions propres $\vec{\xi}$ engendrée par la 'force' de Coriolis n'entraine qu'un changement d'ordre ϵ^2 sur ω. Donc, si on calcule ω en utilisant l'équation (17) et un modèle sans rotation pour évaluer les fonctions propres $\vec{\xi}$, ω sera exacte au premier ordre en ϵ.

2.3 Calcul des splittings

Il s'agit maintenant d'utiliser le principe variationnel pour comparer les fréquences des modes d'oscillation dans les modèles avec et sans rotation. La différence entre ces deux quantités constitue le splitting rotationnel.

2.3.1 Modèle sans rotation dans un repère d'inertie - rappels

Pour une rotation sidérale nulle l'équation aux valeurs propres (16) s'écrit dans un repère d'inertie ($\mathcal{M} \equiv 0$, $\Omega_T \equiv 0$):

$$\omega^{(o)^2}\vec{\xi}^{(o)} = \mathcal{L}^{(o)}\vec{\xi}^{(o)} \tag{18}$$

Les modes propres d'oscillation vérifiant cette équation peuvent (voir par exemple Unno et al. 1989, Sect. 13.3) être développés en utilisant la base complète des harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$ (cf. Annexe A). On écrit donc:

$$\vec{\xi}^{(o)}_{nl} = \sum_{m=-l}^{l} \vec{\xi}^{(o)}_{nlm} \quad \text{avec:} \quad \begin{cases} \vec{\xi}^{(o)}_{nlm} = \left(\vec{e}_r\zeta^{(o)}_{nl}(r) + \eta^{(o)}_{nl}(r)\vec{\nabla}_h\right) Y_l^m(\theta, \varphi) \\ \vec{\nabla}_h = \vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{cases} \tag{19}$$

On peut ainsi obtenir, par résolution de l'équation aux valeurs propres (18), les composantes radiales $\zeta^{(o)}_{nl}$ et horizontales $\eta^{(o)}_{nl}$ de chaque mode propre d'oscillation caractérisé par l'ordre radial n et le degré l. Dans le modèle sans rotation $\vec{v}_o = 0$ et donc $b = 0$ (Eq. (17)) d'où l'expression de la pulsation d'un mode (n, l, m):

$$\omega^{(o)^2} = c/a. \tag{20}$$

Les coefficients a et c dépendent de n et l mais pas de m. Les $2l+1$ fonctions propres $\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}$ $m=-l,..l$ correspondent à des oscillations ayant toutes la même pulsation $\omega^{(o)} \equiv \omega^{(o)}_{nl}$. Dans le modèle sans rotation, le spectre est donc *dégénéré en m*. Notons de plus que ce modèle étant à symétrie sphérique, il n'existe aucun axe privilégié. Le choix de l'axe polaire $\theta = 0$ est donc ici arbitraire.

2.3.2 Modèle avec rotation - expression des splittings

On note $\delta\omega$ la perturbation de la pulsation par rapport au modèle sans rotation (c'est le splitting!). Dans le modèle avec rotation, la pulsation $\omega = \omega^{(o)} + \delta\omega$ doit être solution de l'expression variationnelle (17). Sachant $\delta\omega/\omega^{(o)} \simeq 10^{-4}$, on a: $\omega^2 \simeq {\omega^{(o)}}^2 + 2\omega^{(o)}\delta\omega$ et, en utilisant l'expression (20) de $\omega^{(o)}$, on obtient:

$$\delta\omega = -b/2a \Leftrightarrow \delta\omega = \frac{-i\displaystyle\int_{V_o} \vec{\xi}^{(o)*}_{nlm}.\left((\vec{v}_o.\vec{\nabla}) + \vec{\Omega}_T\wedge\right)\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}\ \rho_o\ dV_o}{\displaystyle\int_{V_o} |\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}|^2\ \rho_o\ dV_o} \tag{21}$$

Ce terme est réel. En effet, pour des oscillations adiabatiques on peut prendre $\zeta^{(o)}_{nl}(r)$ et $\eta^{(o)}_{nl}(r)$ réelles et, en utilisant la symétrie axiale (6) et le développement (19) des modes propres, on obtient facilement les relations:

$$\vec{\xi}^{(o)*}_{nlm}.(\vec{v}_o.\vec{\nabla})\vec{\xi}^{(o)}_{nlm} = im\Omega(r,\theta)|\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}|^2 + \vec{\xi}^{(o)*}_{nlm}.(\vec{\Omega}(r,\theta)\wedge\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}) \tag{22}$$

et :

$$\vec{\xi}^{(o)*}_{nlm}.(\vec{\Omega}(r,\theta)\wedge\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}) = -2im\frac{\Omega(r,\theta)}{2\pi}\eta^{(o)}_{nl}(r)\left[\zeta^{(o)}_{nl}(r)\tilde{P}^m_l(\mu)^2 + \eta^{(o)}_{nl}(r)\frac{\mu\tilde{P}^m_l(\mu)}{\sin\theta}\frac{d\tilde{P}^m_l(\mu)}{d\theta}\right] \tag{23}$$

où l'on a posé $\mu = cos\theta$.
L'équation différentielle vérifiée par les fonctions de Legendre (cf. Eq. (A2)) permet de montrer:

$$I_{nl} \equiv \int_{V_o} |\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}|^2\ \rho_o\ dV_o = \int_0^{R_\odot}\left[{\zeta^{(o)}_{nl}}^2(r) + L^2{\eta^{(o)}_{nl}}^2(r)\right]\ \rho_o r^2 dr \tag{24}$$

En utilisant la normalisation des fonctions de Legendre Eq. (A5), une simple intégration par partie donne:

$$\int_0^\pi \frac{\mu\tilde{P}^m_l(\mu)}{\sin\theta}\frac{d\tilde{P}^m_l(\mu)}{d\theta}\sin\theta\ d\theta = \frac{1}{2}. \tag{25}$$

Ceci permet, en utilisant (23), de réduire le terme en $\vec{\Omega}_T$ dans (21) à une intégrale sur le rayon solaire:

$$-i\int_{V_o}\vec{\xi}^{(o)*}_{nlm}.\left(\vec{\Omega}_T\wedge\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}\right)\ \rho_o\ dV_o = -m\ \Omega_T\ C_{nl} \tag{26}$$

où l'on a défini le *terme de Coriolis* C_{nl} par:

$$C_{nl} \equiv \frac{1}{I_{nl}}\int_0^{R_\odot}\left({\eta^{(o)}_{nl}}^2(r) + 2\eta^{(o)}_{nl}\zeta^{(o)}_{nl}(r)\right)\rho_o(r)r^2\ dr \tag{27}$$

Finalement, le splitting s'exprime sous la forme:

$$\delta\omega_{nlm} = m\left(-\Omega_T\ C_{nl} + \int_0^{R_\odot}\int_{-1}^1 K_{nlm}(r,\mu)\Omega(r,\theta)\ drd\mu\right) \tag{28}$$

avec:

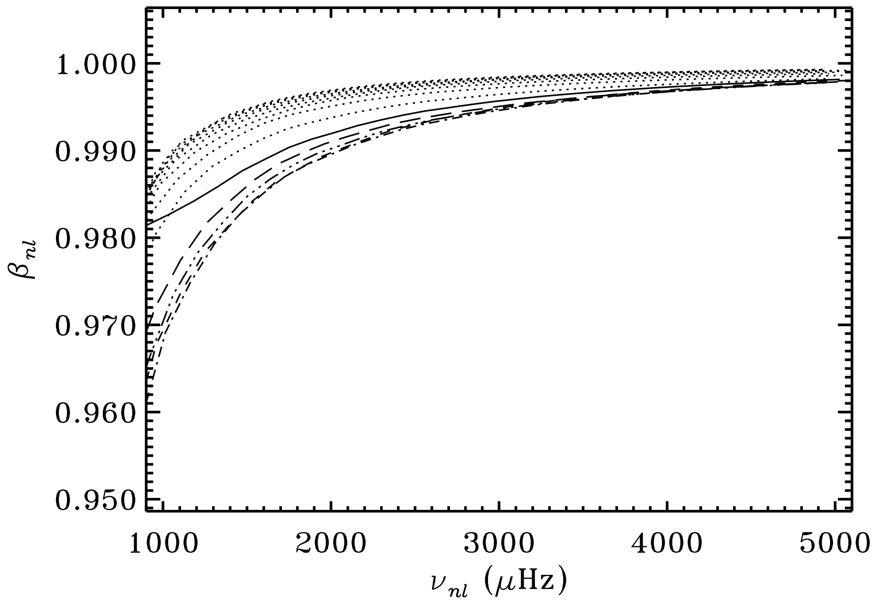


FIG. 5 – *Coefficients $\beta_{nl} = 1 - C_{nl}$ obtenus pour des modes acoustiques dans un modèle solaire standard. Les coefficients correspondants à un même degré l sont reliés par une ligne. $l = 1$: ———; $l = 2$: ----------; $l = 3$: —·—·—·; $l = 4$: —···—···—···; $l = 5$: – – – – – –; $l = 10, 15, ..., 50$: ··············· (β_{nl} augmente avec l). D'après Christensen-Dalsgaard (1997).*

$$\boxed{\begin{aligned} K_{nlm}(r,\mu) = \frac{\rho_o(r) r^2}{I_{nl}} \quad \Bigg\{ \quad & \left(\zeta_{nl}^{(o)^2}(r) - 2\zeta_{nl}^{(o)}(r)\eta_{nl}^{(o)}(r)\right) \tilde{P}_l^m(\mu)^2 \quad + \\ & \eta_{nl}^{(o)^2}(r) \left[\left(\frac{d\tilde{P}_l^m(\mu)}{d\theta}\right)^2 + \frac{m^2}{\sin^2\theta}\tilde{P}_l^m(\mu)^2 - 2\frac{\mu\tilde{P}_l^m(\mu)}{\sin\theta}\frac{d\tilde{P}_l^m(\mu)}{d\theta} \right] \Bigg\} \end{aligned}} \tag{29}$$

On note que le splitting dépend de l'ordre azimutal m: la dégénérescence en m du spectre des oscillations est levée par la rotation. Cette expression relie les splittings synodiques (mesurés depuis la terre) à la rotation solaire synodique.

$$\left(\frac{\delta\omega_{nlm}}{m}\right)_{syn} = \int_0^{R_\odot}\int_{-1}^{1} K_{nlm}(r,\mu)\ \Omega_{syn}(r,\mu)\ dr\ d\mu - C_{nl}\ \Omega_T \tag{30}$$

Il est intéressant d'en déduire deux relations mettant en jeu les quantités sidérales.

1. La relation entre splittings sidéraux et la rotation sidérale s'obtient en posant $\Omega_T = 0$ (on se place dans un repère d'inertie):

$$\boxed{\left(\frac{\delta\omega_{nlm}}{m}\right)_{sid} = \int_o^{R_\odot}\int_{-1}^{1} K_{nlm}(r,\mu)\ \Omega_{sid}(r,\mu)\ dr\ d\mu} \tag{31}$$

Cette expression correspond au résultat obtenu par Hansen et al. (1977) et Gough (1981) mentionné dans l'introduction (§1.1.2). Le résultat obtenu par Ledoux (1951) pour une étoile en rotation rigide $\Omega_{sid} = \Omega_o$ (c.à.d. $(\delta\omega_{nlm}/m)_{sid} = (1 - C_{nl})\Omega_o$, cf. Eq. (5)) se retrouve aisément à partir des équations (21), (22) et (23) en utilisant les propriétés (A5) et (25). Le *terme de Coriolis* est maintenant défini par (27). Pour les modes acoustiques de degrés ou d'ordres radiaux élevés on a $C_{nl} \ll 1$ (Voir **Fig. 5**). Ceci signifie que, pour les modes acoustiques, le splitting rotationnel est dominé par l'advection et l'écart de pulsations entre deux modes ayant des ordres azimutaux m et $m \pm 1$ est donné approximativement par la rotation elle même. Si l'on assimile la rotation solaire à une rotation rigide égale à la rotation de surface à mi-latitude donnée par la loi de Faye (2) on obtient un splitting sidéral entre modes adjacents de l'ordre de 420nHz.

2. La relation la plus utile est celle entre les splittings synodiques mesurés et la rotation sidérale que l'on veut déterminer. On l'obtient en écrivant $\Omega_{syn} = \Omega_{sid} - \Omega_T$ dans (30) et en utilisant la relation de Ledoux pour une rotation rigide:

$$\left(\frac{\delta\omega_{nlm}}{m}\right)_{syn} + \Omega_T = \int_0^{R_\odot}\int_{-1}^{1} K_{nlm}(r,\mu)\Omega_{sid}(r,\mu)\ dr\ d\mu \tag{32}$$

Ceci montre la relation $(\delta\omega/m)_{sid} = (\delta\omega/m)_{syn} + 31.7\text{nHz}$ qui est par ailleurs évidente si on suit le raisonnement (4). Il est intéressant de noter que même pour une rotation sidérale nulle le splitting synodique dépend linéairement de m. L'advection due à la seule rotation terrestre lève la dégénérescence.

3 Étude des noyaux de rotation

La nature du problème inverse qui consiste à déduire la rotation solaire de l'observation des splittings à partir de l'équation (32), est contenue dans la forme des noyaux de rotation $K_{nlm}(r,\mu)$ donnés par l'équation (29). Deux exemples de ces noyaux bidimensionnels sont donnés **Fig. 6** montrant leurs natures oscillantes caractérisées par n nœuds radiaux et $\frac{l-m}{2}$ nœuds en latitude (entre l'équateur et le pôle, soit $l-m$ nœuds d'un pôle à l'autre). On remarque immédiatement que ces noyaux n'ont pas de l'amplitude dans tout l'intérieur solaire et sont au contraire limités dans un certain domaine en rayon et en latitude. Nous verrons par la suite comment ce domaine peut être caractérisé en fonction des entiers n, l et m pour chaque mode propre.

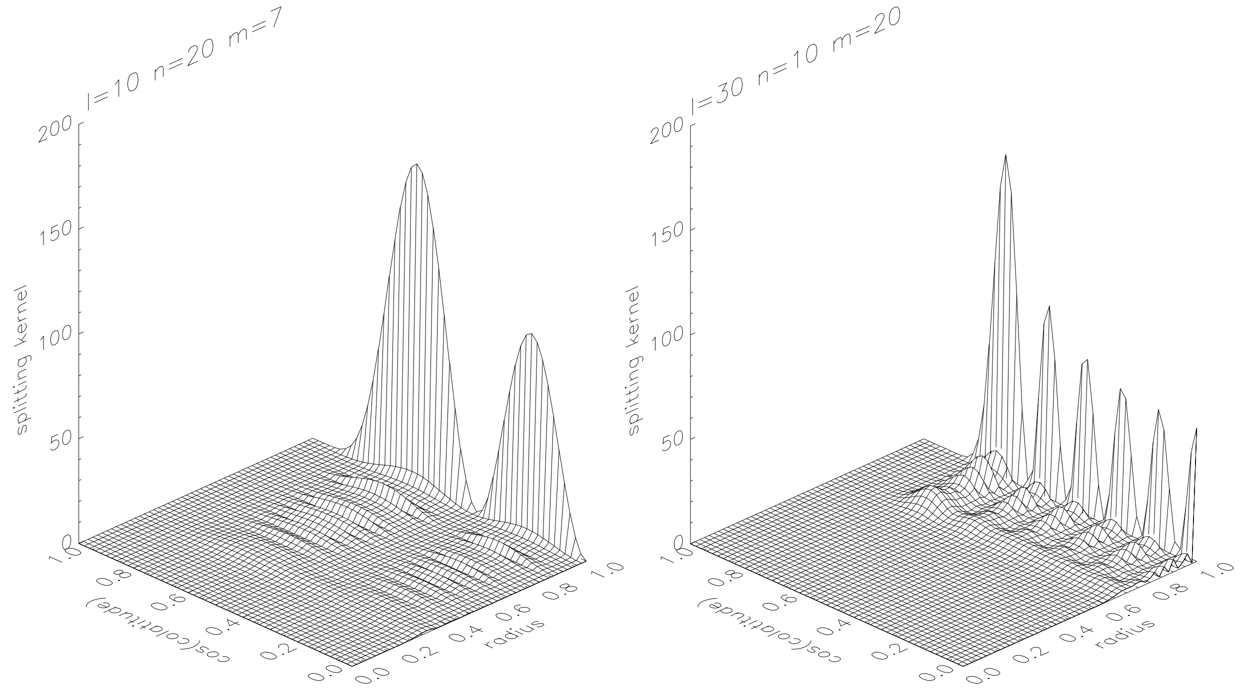


FIG. 6 – *Exemples de noyaux de rotation $K_{nlm}(r,\mu)$ pour $l=10$, $n=20$, $m=7$ (gauche) et $l=30$, $n=10$, $m=20$ (droite). D'après Sekii (1997).*

Ces noyaux (Eq. (29)) peuvent être écrits sous plusieurs formes, mais la décomposition suivante est pratique pour l'analyse de leurs propriétés:

$$K_{nlm}(r,\mu) = K_{nl}(r)W_{lm}(\mu) + L_{nl}(r)X_{lm}(\mu) \tag{33}$$

avec:

$$\begin{aligned}
K_{nl}(r) &= [\zeta_{nl}^{(o)^2} + (L^2-1)\eta_{nl}^{(o)^2} - 2\zeta_{nl}^{(o)}\eta_{nl}^{(o)}]\ \rho r^2\ /I_{nl} && (34)\\
L_{nl}(r) &= L^2\eta_{nl}^{(o)^2}\ \rho r^2\ /I_{nl} && (35)\\
W_{lm}(\mu) &= \tilde{P}_l^m(\mu)^2 && (36)\\
X_{lm}(\mu) &= L^{-2}\left\{\frac{1-\mu^2}{2}\frac{d^2}{d\mu^2}W_{lm}(\mu) + W_{lm}(\mu)\right\} && (37)
\end{aligned}$$

où l'on a noté $L^2 = l(l+1)$ et I_{nl} est donné par l'équation (24).

3.1 Noyaux de rotation en rayon: $K_{nl}(r)$ et $L_{nl}(r)$

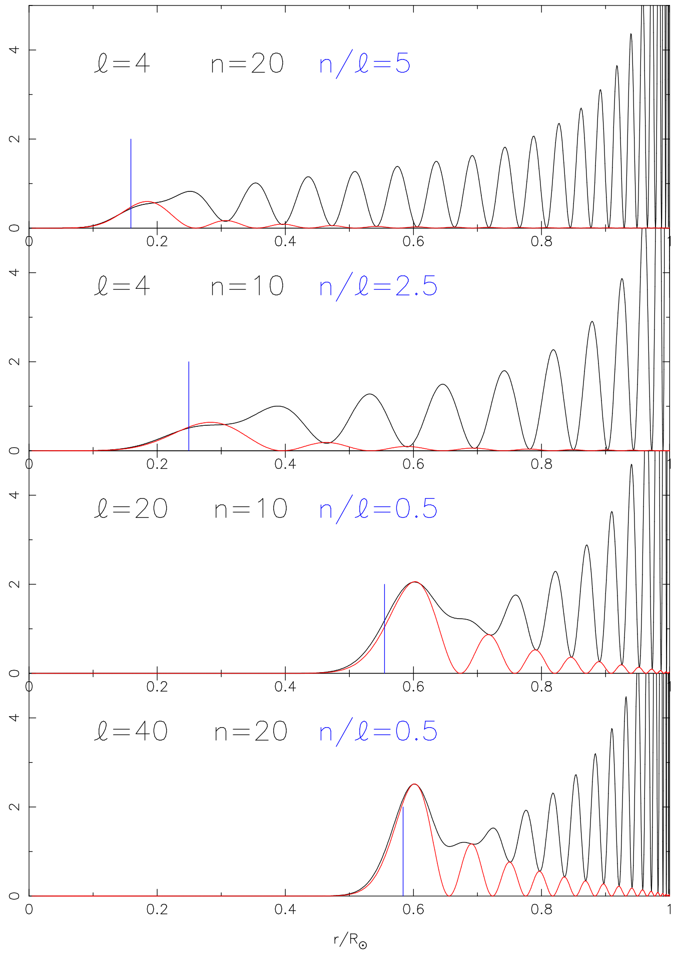


FIG. 7 – *Exemples des composantes radiales $K_{nl}(r)$ (Eq. (34), ligne continue) et $L_{nl}(r)$ (Eq. 35, ligne pointillée) des noyaux de rotation pour différents modes. Les barres verticales indiquent la position du point tournant de chacun des modes considérés.*

La **figure 7** donne des exemples des deux composantes radiales des noyaux de rotations (33) pour différents modes. Les modes de pression observés peuvent être décrits par une approximation locale en ondes planes valable asymptotiquement pour les hautes fréquences (voir le cours de G. Berthomieu). Cette étude permet d'écrire, pour ces modes de pression, une relation de dispersion de la forme:

$$K_r^2 + K_h^2 \simeq \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \tag{38}$$

où K_r et K_h représentent respectivement le nombre d'onde radial et le nombre d'onde horizontal, $c(r)$ la vitesse du son et $\omega_c(r)$ la fréquence de coupure acoustique qui reste très petite ($< 600\mu$Hz) dans tout l'intérieur du Soleil et devient importante (jusqu'à environ 5000μHz) seulement dans une petite couche très près de la surface (au dessus de $0.9995 R_\odot$).

Le nombre d'onde horizontal est défini par:

$$\frac{1}{r^2}\nabla_h^2 f = -K_h^2 f \tag{39}$$

où $\vec{\nabla}_h$ est donné par l'équation (19). K_h^2 est donc entièrement fixé par le choix du développement sur les harmoniques sphériques (cf. Eq. (19)) des quantités perturbées (notées f dans (39)). L'équation différentielle (A2) vérifiée par les polynômes de Legendre donne:

$$K_h^2 = L^2/r^2 \tag{40}$$

Les ondes se propagent pour $K_r^2 > 0$, sont évanescentes pour $K_r^2 < 0$ et les points où $K_r^2 = 0$ sont nommés *points tournants* du mode. En surface la vitesse du son est faible et le nombre d'onde radial s'annule pour $\omega = \omega_c$. La fréquence de coupure augmentant très rapidement juste sous la surface solaire, on peut considérer que celle-ci représente un point tournant commun à tous les modes de pression. La fréquence de coupure acoustique est reliée au gradient de densité et il est également possible de considérer simplement que les ondes de pression étudiées sont toutes réfléchies par le gradient de densité que représente la surface solaire. Pour que l'onde soit stationnaire, il faut que l'on ait une cavité résonnante et donc un deuxième point tournant. La profondeur du point tournant interne est fonction du mode considéré. En effet, à l'intérieur la vitesse du son augmente et la fréquence du coupure est faible. On obtient donc $K_r^2 = 0$ pour $r = r_t$ avec:

$$r_t = \frac{c(r_t)L}{\omega}, \tag{41}$$

ce qui définit le point tournant interne d'un mode comme étant le rayon pour lequel la fréquence du mode est égale à la *fréquence de Lamb* $\omega_l = \frac{Lc}{r}$. Sachant que la fréquence augmente avec l'ordre radial n et que $L \simeq l$, on en déduit que, en première approximation, le point tournant est une fonction du rapport n/l. Plus ce rapport est grand plus le mode acoustique pénétrera l'intérieur du Soleil. Les exemples de la **figure 7** montrent ce comportement pour trois rapports n/l différents.

3.2 Noyaux de rotation en latitude: $W_{lm}(\mu)$ et $X_{lm}(\mu)$

L'analyse locale en onde plane permet également de définir un point tournant en latitude. Comme nous l'avons déjà dit la description horizontale de l'onde est fixée par la projection sur les harmoniques sphériques. Le point tournant en latitude est donc simplement une propriété des polynômes de Legendre. Il est néanmoins possible de se représenter les choses d'une manière plus physique en décomposant le nombre d'onde horizontal en deux composantes selon la latitude et la longitude. Soit:

$$K_h^2 = \frac{L^2}{r^2} = K_\varphi^2 + K_\theta^2; \quad \text{avec:}\ \ \nabla_h^2 = \nabla_{h\theta}^2 + \nabla_{h\varphi}^2 \quad \text{et:}\ \ \nabla_{h\varphi}^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{42}$$

La rotation étant supposée à symétrie axiale on peut poser pour les quantités perturbées:

$$f(r,\theta,\varphi,t) = f'(r,\theta,t)e^{im\varphi} \tag{43}$$

et on obtient ainsi pour la partie longitudinale du nombre d'onde:

$$\frac{1}{r^2}\nabla_{h\varphi}^2 f = -K_\varphi^2 f \ \Leftrightarrow\ K_\varphi^2 = \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta} \tag{44}$$

d'où l'on tire le domaine de propagation en latitude et le *point tournant en latitude* θ_t par:

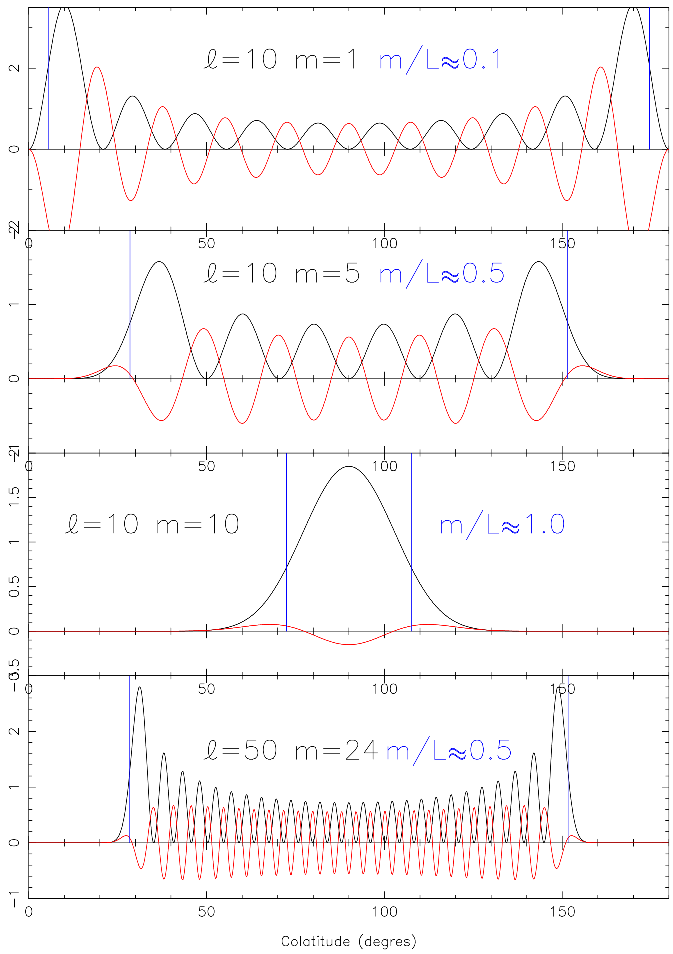


FIG. 8 – *Exemples des composantes latitudinales $W_{lm}(\mu)$ (Eq. 36, ligne continue) et $X_{nl}(\mu)$ (Eq. 37, ligne pointillée) des noyaux de rotation pour différents modes. Les barres verticales indiquent la position du point tournant de chacun des modes considérés.*

$$K_\theta^2 = \frac{1}{r^2}\left(L^2 - (m/\sin\theta)^2\right) > 0 \Leftrightarrow \pi - \theta_t < \theta < \theta_t \quad \text{avec: } \theta_t = \sin^{-1}(|m|/L) \tag{45}$$

La **figure 8** montre sur quelques exemples le fait que le point tournant en latitude est une fonction de m/L.

Une autre propriété importante de W_{lm} et X_{lm} est que ce sont des fonctions paires de l'ordre azimutal m et de la colatitude θ. *On ne pourra donc obtenir que la composante de la rotation qui est symétrique par rapport à l'équateur.* Soit:

$$\Omega_s(r,\mu) \equiv \frac{\Omega(r,\theta) + \Omega(r,\pi-\theta)}{2} \tag{46}$$

L'intégration en latitude peut donc se faire entre l'équateur et le pôle seulement, et cela en multipliant simplement par deux le noyau de rotation. La partie symétrique $\Omega_s(r,\mu)$ de la rotation ainsi définie sera notée simplement $\Omega(r,\mu)$ dans la suite. La parité du noyau en m donne avec l'équation (32):

$$\delta\omega_{nlm} = -\delta\omega_{nl,-m} = \frac{\omega_{nlm} - \omega_{nl,-m}}{2} \tag{47}$$

ce qui montre que, au premier ordre, **c'est la partie symétrique (par rapport à $m = 0$) de la structure fine du spectre qui peut être mise en relation avec la partie symétrique (par rapport à l'équateur) de la rotation**. Autrement dit, pour remonter à la partie symétrique de la rotation, on ne disposera au mieux que de l observables ou splittings (et non pas $2l+1$) pour chaque mode (n,l). Nous verrons par la suite que les conditions d'observations peuvent encore réduire ce nombre d'observables accessibles par mode. La partie non symétrique de la structure fine du spectre peut être reliée aux effets de la 'force' centrifuge, du champ magnétique ou de tout écart à la symétrie sphérique qui ne seront pas considérés ici.

3.3 Séparabilité du noyau - Formulation $R^1 \otimes R^1$

Revenons maintenant sur une propriété importante des noyaux complets à 2D (33). La composante horizontale du déplacement et donc $L_{nl}(r)$ (cf. Eq. (35)) n'a d'amplitude qu'au voisinage du point tournant interne et donc, partout sauf près du point tournant on a $K_{nl}(r) > L_{nl}(r)$, ce qui se vérifie bien sur la **figure 7**. Si l'on ajoute à cela que $X_{lm}(\mu)$ est oscillant autour de 0 avec $\int_{-1}^{1} X_{lm}(\mu)d\mu = 0$ alors que $W_{lm}(\mu)$ est toujours positif et tel que $\int_{-1}^{1} X_{lm}(\mu)d\mu = 1$, alors il apparaît que la contribution à l'intégrale double du second terme du noyau (33) doit être faible. En première approximation, on pourra donc réécrire l'équation intégrale:

$$\frac{\omega_{nlm} - \omega_{nl,-m}}{2m} \simeq 2 \int_0^{R_\odot} \int_0^1 K_{nl}(r) W_{lm}(\mu) \Omega(r,\mu)\; dr d\mu \tag{48}$$

Dans cette approximation le noyau est séparable en rayon et latitude. Cette propriété est parfaitement visible sur la **figure 6** des noyaux 2D complets. Par ailleurs une intégration par partie permet d'exprimer la partie négligée de l'intégrale par (cf. Cuypers, 1980):

$$\iint L_{nl}(r) X_{lm}(\mu) \Omega(r,\mu)\; dr d\mu = \frac{1}{2} \iint L_{nl}(r) W_{lm}(\mu) \left[3 \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} cotg(\theta) + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} \right] dr d\mu \tag{49}$$

Cette expression montre que la formulation (48) est exacte pour une rotation indépendante de la latitude et que c'est une très bonne approximation pour une rotation faiblement différentielle.

Cette propriété de séparabilité du noyau de rotation a été exploitée pour mettre en oeuvre un approche dîte $R^1 \otimes R^1$ du problème inverse 2D qui consiste à séparer celui-ci en une succession de deux problèmes à une dimension (Sekii 1993a,b):

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\omega_{nlm}}{m} = 2 \displaystyle\int_0^1 F_{nl}(\mu) W_{lm}(\mu) d\mu, \;\; m = 1, l \\ F_{nl}(\mu) = \displaystyle\int_0^{R_\odot} K_{nl}(r) \Omega(r,\mu) dr \end{cases} \tag{50}$$

Cette formulation permet une approche numérique moins lourde que l'approche 2D directe. Des difficultés subsistent par le fait que les deux équations 1D restent couplées par le degré l. Néanmoins, Pijpers et Thompson (1996) ont montré que cette difficulté peut être en grande partie levée et que la formulation $R^1 \otimes R^1$ peut également être étendue afin de prendre en compte le noyau complet (33) constitué de la somme de deux noyaux séparables.

3.4 Relation 1D rotation équatoriale - splittings $m = l$ (modes sectoraux)

Une des propriétés de la partie angulaire des noyaux conduit à une relation 1D entre les splittings des modes sectoraux ($m = l$) et la partie équatoriale ($\Omega_{eq}(r) = \Omega(r, \mu = 0)$) de la rotation. En effet, pour les modes sectoraux de degrés l élevés le point tournant en latitude est proche de l'équateur ($\theta_t = \sin^{-1}(l/L) \simeq \pi/2$) si bien que, partant de l'approximation 2D (48), on obtient la relation 1D:

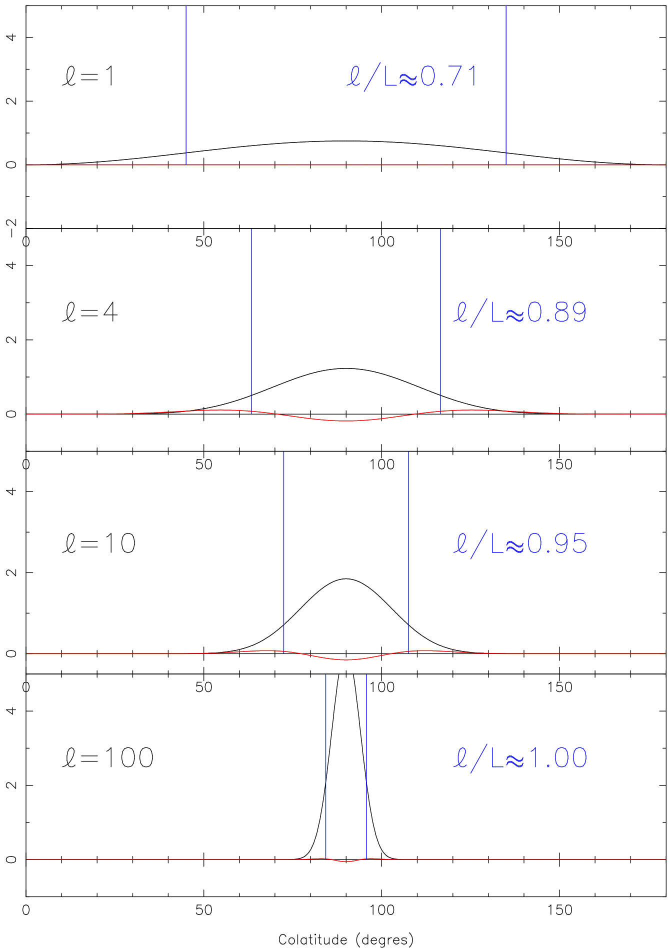


FIG. 9 – *Comme Fig. 8 mais pour les modes sectoraux* $l = 1, 4, 10, 100$. *Les points tournants sont d'autant plus éloignés de l'équateur que le rapport* l/L *est différent de 1 et donc que le degré* l *est petit.* $\theta_t(l = 1) = 45°$, $\theta_t(l = 4) \simeq 63°$, $\theta_t(l = 10) \simeq 72°$, $\theta_t(l = 100) \simeq 84°$

$$\frac{\omega_{nll} - \omega_{nl,-l}}{2l} \simeq \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\Omega_{eq}(r)\, dr \tag{51}$$

Cette équation 1D employée par Duvall dès 1984 reste très utilisée comme première approximation (eg. Antia et al. 1996, Rabello Soares et al. 1997, Corbard et al. 1998c). Il faut cependant noter qu'elle n'est pas valable pour les modes de bas degrés. La **figure 9** montre en effet que pour ces modes la partie angulaire du noyau de rotation peut s'étendre loin de l'équateur et ce d'autant plus que le rapport l/L s'éloigne de 1. On ne peut donc pas en toute rigueur utiliser cette équation pour remonter par inversion à la rotation de cœur solaire sans faire des hypothèses sur la dépendance en latitude de la rotation (Corbard 1997, Corbard et al. 1998e).

4 'Observation' des splittings - Utilisation des 'coefficients a'

Ce chapitre a pour but de montrer comment les contraintes observationnelles qui ne permettent pas, en général, d'obtenir directement les splittings, conduisent à une reformulation du problème inverse.

4.1 Diagramme $m - \nu$ (degré azimutal - fréquence)

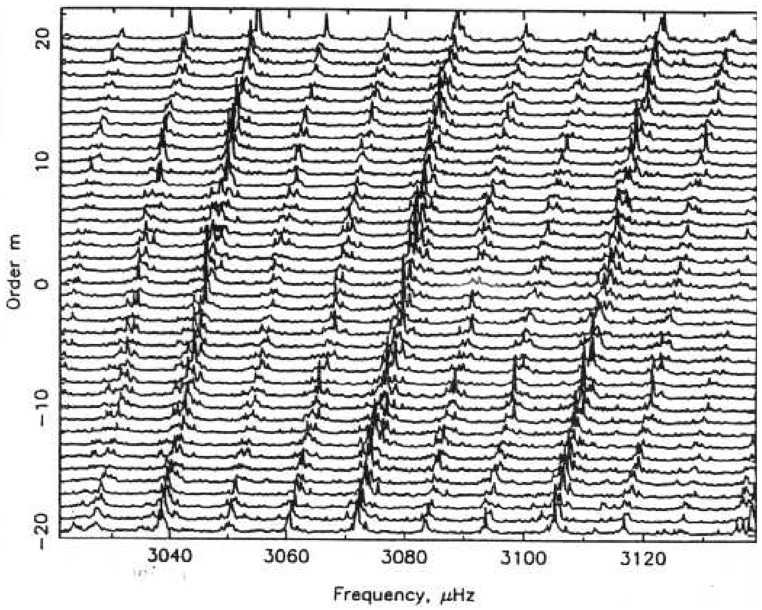


FIG. 10 – *Spectres de puissance des harmoniques sphériques* $l = 20$, $m = -20, .., +20$ *obtenus au Big Bear Solar Observatory. Les pics dans le spectre* ($m = 0$) *se trouvant aux fréquences* $\nu = 3047$, 3080 *et* $3114 \mu Hz$ *correspondent aux modes* $(n, l) = (15, 19)$, $(15, 20)$ *et* $(15, 21)$. *La présence des mode* $l = 19$ *et* $l = 21$ *dans le spectre du mode* $l = 20$ *provient du fait que l'on n'observe pas l'ensemble de la surface solaire (seulement un peu moins de la moitié) et que les harmoniques sphériques sur lesquels on projette les observations pour obtenir ce spectre ne sont pas orthogonaux sur la seule partie observable du disque. Les autres pics, séparés de* $\pm 11.6 \mu Hz$, *sont la signature dans le spectre de la fenêtre d'observation interrompue toutes les nuits. La différence en fréquence entre les différents pics en fonction de* m *représente le splitting. D'après Libbrecht (1989).*

La mesure des splittings se fait sur le spectre des fréquences d'oscillation obtenu après projection des observations (images du soleil en vitesses ou en intensités) sur les harmoniques sphériques. On obtient ainsi un diagramme degré azimutal - fréquence (diagramme $m - \nu$). La **figure 10** donne une représentation classique d'un tel diagramme obtenu à partir d'observations faites au sol sur un seul site et la **figure 11** donne, dans une représentation 3D en niveau de gris, un exemple plus récent de diagramme obtenu en utilisant le réseau GONG d'observatoires au sol.

La résolution spectrale n'étant en général pas suffisante pour séparer les pics individuellement pour chaque m, on décrit la dépendance en m de la fréquence pour chaque mode (n, l) observé en décrivant les lignes du spectre $m - \nu$ à l'aide de leurs projections sur des polynômes $\mathcal{P}_j^l(m)$ (Voir Schou 1992). On obtient:

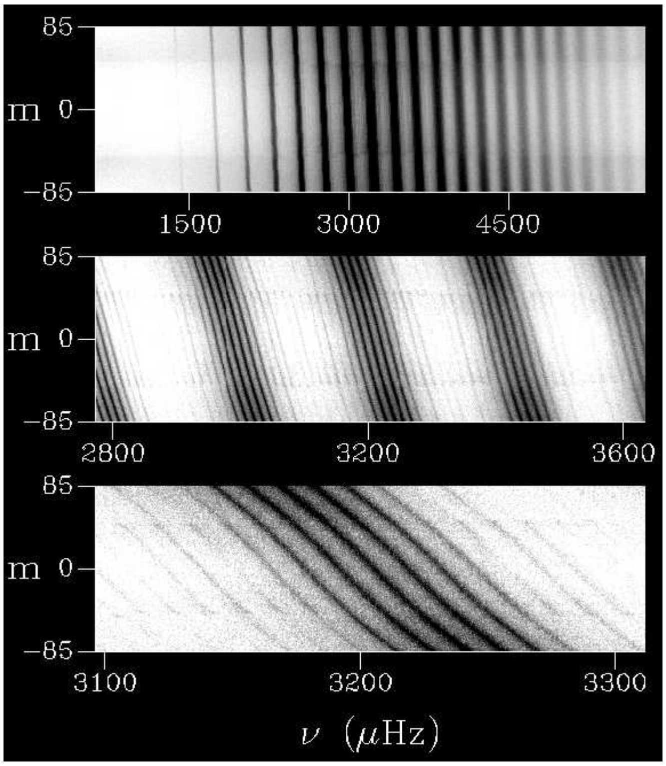


FIG. 11 – *Spectre $m - \nu$ pour $l = 85$ obtenu entre le 23 Août 1995 et le 18 Février 1996 par le réseau GONG. La figure du haut montre l'ensemble du spectre, celle du milieu correspond aux modes $n = 7, 8, 9$ et celle du bas est un agrandissement du spectre du mode $n = 8$. Les problèmes liés aux harmoniques du jour sont en grande partie évités par l'utilisation du réseau. Cependant le spectre est montré à différentes échelles pour mettre en évidence qu'il subsiste des pics secondaires ('side lobes') provenant du fait que l'on n'observe pas l'ensemble de la surface solaire. On note que la convention pour le choix du signe de m est différente de celle de la figure précédente. Ici un ordre azimutal négatif correspond à un* mode prograde *(c.à.d. se propageant dans le sens de la rotation) dont la fréquence est augmentée par rapport à celle du mode $m = 0$. D'après Hill et al. (1996).*

$$\nu_{nlm} - \nu_{nl0} \simeq \sum_{j=0}^{N^{nl}} a_j^{nl} \mathcal{P}_j^l(m) \tag{52}$$

où le nombre N^{nl} de polynômes utilisés dépend de la qualité des observations pour le mode considéré. Par exemple, le maximum de coefficients a calculés est de 3 pour les données LOWL[6], 6 pour les données BBSO[7] et jusqu'à 36 pour les données MDI[8]. Le réseau GONG fournit également une estimation, pour chaque mode (n, l), de la fréquence de chaque pic du multiplet ce qui permet d'accéder directement aux mesures individuelles de splittings.

6. LOWL est un instrument situé à Hawaï, dédié à l'observation des modes de degrés l faibles (LOW-L), http://www.hao.ucar.edu/public/research/mlso/LowL/lowl.html

7. Big Bear Solar Observatory, http://sundog.caltech.edu

8. Michelson Doppler Imager, http://soi.stanford.edu, à bord du satellite SoHO

4.2 Nomenclature des polynômes utilisés pour décrire le diagramme $m - \nu$

Plusieurs types de polynômes ont été utilisés pour décrire les observations. Historiquement, Duvall et al. (1986) ont utilisé $\mathcal{P}_j^l(m) = LP_j(m/L)$ où P_j sont les polynômes de Legendre puis Brown & Morrow (1987) ont utilisé $\mathcal{P}_j^l(m) = lP_j(m/l)$ pour faciliter la comparaison avec des résultats théoriques. Ces deux formes de polynôme resteront utilisées (notamment par Woodard & Libbrecht (1993) pour les mesures du BBSO réalisées entre 1986 et 1990) jusqu'à ce que Ritzwoller & Lavely (1991) fassent remarquer qu'il serait avantageux de choisir des polynômes orthogonaux sur l'espace discret en m. En effet, le fait que les polynômes de Legendre ne soient pas orthogonaux sur cet espace entraîne que la valeur d'un coefficient a dépend du nombre N^{nl} de termes utilisés dans le développement (52) et ces coefficients ne peuvent pas être considérés comme statistiquement indépendants (cf. Annexe B). Ces auteurs suggèrent donc d'utiliser des polynômes orthonormaux $\mathcal{P}_j^l(m) = \beta_{jl}^m$ définis par:

$$\sum_{m=-l}^{m=+l} \beta_{jl}^m \beta_{kl}^m = \delta_{kl} \tag{53}$$

Ces polynômes sont reliés simplement aux coefficients de Clebsh-Gordon $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm}$ (e.g. Edmonds 1960) par:

$$\beta_{jl}^m = \sqrt{\frac{2j+1}{2l+1}} C_{lmj0}^{lm} \tag{54}$$

mais ne seront en fait jamais utilisés ainsi normalisés. Schou et al. (1994) utilisent des polynômes $\mathcal{S}_{j,l}^m$ orthogonaux, c'est à dire:

$$\sum_{m=-l}^{m=+l} \mathcal{S}_{j,l}^m \mathcal{S}_{k,l}^m = 0 \quad \text{si } j \neq k, \tag{55}$$

mais, par souci de compatibilité avec les expressions en polynômes de Legendre, ils les normalisent tel que:

$$\mathcal{S}_{j,l}^l = l \tag{56}$$

En effet, les polynômes ainsi définis sont toujours, pour j fixé, asympotiquement égaux pour $l \gg 1$ à la fois à $lP_j(l/m)$ et à $LPj(L/m)$. Les équations (55) et (56) définissent complètement ces polynômes. On obtient[9]:

$$\mathcal{S}_{j,l}^m = \frac{l\sqrt{(2l-j)!(2l+j+1)!}}{(2l)!\sqrt{2l+1}} C_{lmj0}^{lm} \tag{57}$$

Enfin les splittings obtenus par le réseau GONG sont exprimés en fonction de polynômes orthogonaux $\mathcal{P}_j^l(m) = \gamma_{sl}^m$ normalisés d'une troisième manière:

$$\gamma_{jl}^m = L^2 \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\, C_{l1j0}^{l1} \;\; C_{lmj0}^{lm} \tag{58}$$

L'intérêt de ce choix apparaîtra plus clairement au §4.3.3. Des relations de récurrence basées sur les propriétés des coefficients de Clebsh-Gordon peuvent être trouvées dans Ritzwoller & Lavely (1991) et Pijpers (1997)[10] permettent d'obtenir simplement les polynômes γ_{jl}^m et $\mathcal{S}_{j,l}^m$. Schou et

9. Cette formule est donnée par Kosovichev et al. (1997) mais avec un choix moins conventionnel pour la phase des Clebsh-Gordon (C_{lmj0}^{lm} est noté C_{j0lm}^{lm})

10. Dans la formule de récurrence obtenue par Pijpers (1997) (Eq. (46)), les coefficients de Clebsh-Gordon, notés $< j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m >$ doivent en fait être multipliés par $(-1)^m$ si on utilise la convention d'Abramowitz & Stegum (1972) comme citée par l'auteur. (Cette convention est identique à celle d'Edmonds (1960) utilisée dans ce cours).

al. (1994) construisent les polynômes $\mathcal{S}^m_{j,l}$ par simple orthogonalisation de Gram-Schmit à partir des polynômes de Legendre.

Les différents polynômes $\mathcal{P}^l_j(m)$ utilisés sont de même parité que j. Les splittings définis par (47) étant des fonctions impaires de m, seuls les coefficients a d'indices impairs seront reliés à la rotation. Les coefficients d'indices pairs sont d'amplitudes beaucoup plus faibles et peuvent être reliés aux effets de la force centrifuge, du champ magnétique ou de tout écart à la symétrie sphérique. A partir de (52), on obtient:

$$\delta\omega_{nlm} = \frac{\omega_{nlm} - \omega_{nl,-m}}{2} \simeq 2\pi \sum_{j=0}^{N^{nl}} a^{nl}_{2j+1} \mathcal{P}^l_{2j+1}(m) \qquad (59)$$

De plus pour tous ces polynômes on a $\mathcal{P}^l_1(m) \propto m$, si bien que le coefficient a_1 décrit la dépendance linéaire en m du splitting. Nous avons vu que pour une étoile en rotation rigide, seule cette composante existe. Pour le Soleil, les diagrammes $m - \nu$ (**Figs. 10, 11**) montrent clairement que la dépendance en m du splitting est quasi-linéaire. Le coefficient a_1 sera donc le terme dominant tandis que les autres coefficients impairs décriront l'écart (faible) à la linéarité induit par la dépendance en latitude de la rotation solaire. Cette non linéarité des lignes du diagramme $m - \nu$ est bien visible sur l'agrandissement **Fig. 11**.

4.3 Formulation 1.5D pour les coefficients a

4.3.1 Principe

Étant donné le développement des splittings sur des polynômes $\mathcal{P}^l_j(m)$, il est naturel de développer aussi la dépendance en latitude de la rotation sur des polynômes :

$$\Omega(r,\mu) = \sum_{k=0}^{kmax} \Omega_{2k+1}(r) f_k(\mu) \qquad (60)$$

La rotation $\Omega(r,\mu)$ cherchée étant la partie symétrique par rapport à l'équateur de la rotation solaire, c'est une fonction paire de μ et donc les fonctions $f_k(\mu)$ sont des polynômes en μ^2 de degrés (k).

Le principe de la *formulation 1.5D* est, à partir de la relation 2D (28), de se ramener à une série de relations 1D relatives aux coefficients a en introduisant les projections des splittings (59) et de la rotation (60) dans (28). Les intégrales en latitude peuvent alors être calculées analytiquement et exprimées comme un polynôme de l'ordre azimutal m. Si le nombre $kmax$ de polynômes $f_k(\mu)$ utilisés est pris égal au nombre $N^{nl} = jmax$ de coefficients a utilisés pour décrire le splitting du mode, l'identification des termes de même puissances en m permet ensuite d'établir une série de relations 1D entre les coefficients a et les composantes $\Omega_{2k+1}(r)$ de la rotation.

4.3.2 Aspects historiques - Avant Ritzwoller & Lavely (1991)

Historiquement, plusieurs formes de polynômes ont été utilisées. Citons le développement en puissance de μ, $f_k(\mu) = \mu^{2k}$ (e.g. Brown et al. 1989), permettant une comparaison directe avec les observations de surface traditionnellement exprimées sous cette forme (cf. la loi de Faye (2)); et les polynômes de Legendre, $f_k(\mu) = P_{2k}(\mu)$ (e.g. Korzennik et al. 1988), qui ont l'avantage sur les précédents d'être orthogonaux.

On montre que d'une manière générale *seul* Ω_{2k+1} $k \geq j$ *contribue au coefficient* a_{2j+1} et il existe des noyaux $K_{nl}^{kj}(r)$ tels que:

$$2\pi \quad a_{2j+1}^{nl} = \sum_{k=j}^{jmax} \int_0^{R_\odot} K_{nl}^{kj}(r)\Omega_{2k+1}(r)dr \quad j = 0, jmax \tag{61}$$

Ceci constitue un système triangulaire d'équations 1D qui peuvent être résolues par récurrence en commencant par $k = jmax$ ou simultanément (Thompson 1990). A partir de cette équation, il est également possible, dans la limite des degrés l élevés, de trouver, pour chaque k, une combinaison linéaire des coefficients a, $\sum_j \alpha_j^k a_{2j+1}$, telle que:

$$2\pi \sum_{j=k}^{jmax} \alpha_j^k a_{2j+1} \simeq \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\Omega_{2k+1}(r) \tag{62}$$

Pour $jmax = 2$, $\mathcal{P}_j^l(m) = LP_j(m/L)$ et $f_k(\mu) = \mu^{2k}$ on obtient (Brown et al. 1989, Dzienbowski & Goode 1991):

$$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha_0^0 = 1 & \alpha_1^0 = 1 & \alpha_2^0 = 1 \\ & \alpha_1^1 = -5 & \alpha_2^1 = -14 \\ & & \alpha_2^2 = 21 \end{array} \right. \tag{63}$$

Pour $jmax = 2$, $\mathcal{P}_j^l(m) = LP_j(m/L)$ et $f_k(\mu) = P_{2k}(\mu)$ Korzennik et al. (1988) donnent (voir aussi Ritzwoller & Lavely (1991)):

$$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha_0^0 = 1 & \alpha_1^0 = -2/3 & \alpha_2^0 = 553/840 \\ & \alpha_1^1 = -10/3 & \alpha_2^1 = 8/3 \\ & & \alpha_2^2 = 24/5 \end{array} \right. \tag{64}$$

Cependant ces équations restent couplées et donc les composantes Ω_{2k+1} obtenues à partir de ces équations ne sont pas indépendantes et les erreurs sont corrélées.

Brown et al. (1989) remarquent qu'un choix judicieux des fonctions $f_k(\mu)$ ($f_0(\mu) = 1$, $f_1(\mu) = \mu^2 - 1/5$, $f_2(\mu) = \mu^4 - 2/3\mu^2 + 1/21$), permet, dans la limite des degrés l élevés, de découpler ces équations (c.à.d. de supprimer les termes $k \neq j$ dans la somme (61)).

4.3.3 Utilisation des coefficients de Clebsh-Gordon

D'une manière tout à fait générale, Ritzwoller & Lavely (1991) ont identifié la rotation différentielle à la partie toroïdale, indépendante de la longitude et de degré impair d'un champ de vitesse laminaire et stationnaire. Ceci conduit en effet à prendre:

$$f_k(\mu) = \frac{\partial Y_{2k+1}^0(\theta,\varphi)}{\partial \mu} = -\sqrt{\frac{4k+3}{4\pi}} \frac{P_{2k+1}^1(\mu)}{\sin\theta}, \tag{65}$$

qui est identique (à une normalisation près, cf. Annexe A) au choix proposé pour $k = 0, 1, 2$ par Brown et al. (1989) d'une manière plus empirique (cf. §4.3.2). En remplacant (60),(65) dans l'équation 2D (31), on obtient (Ritzwoller et Lavely 1991):

$$\delta\omega_{nlm} = \sum_{j=0}^{jmax} \gamma_{l,2j+1}^m \int_0^{R_\odot} \Omega_{2j+1}(r) K_{nlj}(r) dr \tag{66}$$

avec:

$$K_{nlj}(r) = K_{nl}(r) + L^{-2} L_{nl}(r) \left\{1 - (j+1)(2j+1)\right\} \tag{67}$$

Ceci justifie l'intérêt du choix des polynômes γ_{jl}^m (Eq.(58)) pour le développement des splittings. En effet, par identification de (66) avec (59) (pour $\mathcal{P}_{2j+1}^l(m) = \gamma_{jl}^m$), et sachant que les polynômes

$\mathcal{P}_j^l(m)$			$f_k(\mu)$					Equations 1.5 D		
$LP(\frac{m}{L})$ BBSO GONG	γ_{jl}^m GONG	$\mathcal{S}_{jl}^m$ LOWL MDI	μ^{2k}	$P_{2k}(\mu)$	$C_k \frac{\partial Y_{2k+1}^0}{\partial \mu}$: ${}^1C_k$	${}^2C_k$	${}^3C_k$	Eq(s).	Validité	Couplage
x			x	x	x	x	x	(61)	$\forall l$	Couplées
x		x	x					(62)(63)	$l \gg j$	
x		x		x				(62)(64)		
	x				x			(67)(68)	$\forall l$	Découplées
		x				x				
x		x					x	(69)	$l \gg j$	
	x				x					

TAB. 1 – *Nomenclature des formulations 1.5 D en fonctions des polynômes $\mathcal{P}_j^l(m)$ utilisés pour décrire le diagramme $m-\nu$ et des polynômes $f_k(\mu)$ choisis pour la dépendance en latitude de la rotation. ${}^1C_k = 1$, ${}^2C_k = \frac{\mathcal{S}_{2k+1,l}^m}{\gamma_{2k+1,l}^m}$ (cf. Eqs. (A9)(A10)), ${}^3C_k = {}^2C_k \tilde{v}_k^{(l)}$ (cf. Eqs. (A11)(70))*

γ_{jl}^m sont orthogonaux, on obtient des équations 1D complètement découplées et ce même pour l faible:

$$2\pi a_{2j+1}^{nl} = \int_0^{R_\odot} K_{nlj}(r)\Omega_{2j+1}(r)dr \quad j = 0, jmax \tag{68}$$

La relation (A9) entre les polynômes $\mathcal{S}_{j,l}^m$ et $\gamma_{j,l}^m$ permet, de trouver la relation équivalente si les polynômes $\mathcal{P}_{2j+1}^l(m) = \mathcal{S}_{j,l}^m$ sont utilisés pour projeter les splittings.

Enfin, on remarque que pour $l \gg j$ la contribution de la partie dépendant de j au noyau K_{nlj} est faible. Pour les degrés l élevés on peut donc en première approximation prendre $K_{nlj}(r) \simeq K_{nl}(r)\ \forall j \ll l$. Donc, pour les degrés l élevés, si $\mathcal{P}_{2j+1,l}^l(m) = \gamma_{2j+1,l}^m$ et si la rotation est développée par (60) et (65), alors:

$$2\pi\ a_{2j+1}^{nl} = \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\Omega_{2j+1}(r)dr \quad l \gg j \tag{69}$$

De plus, la relation (A11) entre les polynômes $\mathcal{S}_{j,l}^m$ et $\gamma_{j,l}^m$ pour $l \gg j$, montre que si on utilise $\mathcal{P}_{2j+1,l}^l(m) = \mathcal{S}_{2j+1,l}^m$ (ou les polynômes de Legendre $LP_{2j+1}(m/L)$ ou $lP_{2j+1}(m/l)$ puisqu'ils sont asymptotiquement égaux à $\mathcal{S}_{2j+1,l}^m$ pour $l \gg 1$), alors la relation (69) correspond a un développement (60) de la rotation avec:

$$f_k(\mu) = (-1)^{k+1} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \frac{P_{2k+1}^1(\mu)}{\sin\theta} \tag{70}$$

(cf. Kosovichev 1988, 1996, 1998) [11].

La **table 1** donne un résumé des équations 1.5D utilisables en fonction du type de coefficients a (c.à.d. du type de polynômes $\mathcal{P}_j^l(m)$) utilisés pour les principales observations disponibles actuellement.

11. On note une erreur de signe dans Kosovichev (1996, 1998) et il faut lire $(2k+1)!!$ au lieu de (2k-1)!! dans Kosovichev (1998)

4.4 Relation 1D pour une colatitude fixée

4.4.1 Cas général

Pour chaque mode (n, l) il est possible de définir une moyenne $\Omega^{nl}(\theta_0)$ de la rotation à une colatitude donnée θ_0 par:

$$\Omega^{nl}(\theta_0) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\Omega(r, \mu_0)dr \quad \text{avec:} \ \ \mu_0 = \cos(\theta_0) \tag{71}$$

Pour les degrés l élevés, on peut utiliser l'équation (69). En multipliant les deux membres par $f_j(\mu_0)$ et en sommant sur j, on obtient:

$$\Omega^{nl}(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\Omega(r, \mu_0)dr \simeq \sum_{j=0}^{jmax} a^{nl}_{2j+1} f_j(\mu_0) \quad l \gg jmax \tag{72}$$

En accord avec ce qui a été vu précédemment, on remplacera $f_j(\mu_0)$ par l' expression (65) si on utilise les polynômes $\mathcal{P}^l_j(m) = \gamma^m_{j,l}$ (voir par exemple Antia et al. 1998), ou par l'expression (70) pour des coefficients a liés aux autres choix de polynômes (voir par exemple Morrow 1988, Wilson & Burtonclay 1995).

4.4.2 Cas de la rotation équatoriale: retour sur les splittings sectoraux

Notons le cas particulier de la rotation équatoriale ($\theta_0 = 90°$) pour laquelle le développement (70) de la rotation conduit à:

$$\Omega^{nl}(90°) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\Omega_{eq}(r)dr \simeq \sum_{j=0}^{jmax} a^{nl}_{2j+1} \qquad l \gg jmax \tag{73}$$

Pour les modes sectoraux ($m = l$) la relation (59) et la normalisation (56) conduisent à:

$$\frac{\delta\omega_{nll}}{l} \simeq 2\pi \sum_{j=0}^{jmax} a^{nl}_{2j+1}, \tag{74}$$

si bien que l'on retrouve la relation (51) entre les splittings sectoraux et la rotation équatoriale valable pour les degrés l élevés. Nous avons montré au §3.4 que les splittings sectoraux de bas degrés ne sont pas sensibles seulement à la rotation équatoriale.

4.5 Formulation 2D pour les coefficients a

4.5.1 Cas général

Si l'on suppose que les coefficients a sont obtenus par une méthode de moindres carrés à partir des splittings individuels et de la relation (59), alors il existe des polynômes ${}^\dagger\mathcal{P}^l_j(m)$, appelés 'pseudo inverses de $\mathcal{P}^l_j(m)$' (cf. Annexe B) tels que:

$$2\pi \ a^{nl}_{2j+1} \simeq \sum_{m=1,l} {}^\dagger\mathcal{P}^l_j(m)\delta\omega_{nlm} \tag{75}$$

En pratique il n'est pas toujours possible d'identifier tous les pics dans le diagramme $m - \nu$ (notamment pour les degrés l élevés), et la procédure pour obtenir les coefficients a peut ne pas être une simple méthode de moindres carrés (Schou 1992, voir aussi Appourchaux (1998) pour les splittings de bas degrés). Cependant la relation linéaire (75) peut être considérée comme une bonne approximation de la relation entre splittings et coefficients a. Si l'on reporte (75) dans l'équation 2D (31), on obtient une équation intégrale 2D reliant chaque coefficient a à la rotation par:

$$2\pi\ a_{2j+1}^{nl} \simeq 2\int_0^{R_\odot}\int_0^1 \underbrace{\sum_{m=1}^{l} m^\dagger \mathcal{P}_{2j+1}^{l}(m) K_{nlm}(r,\mu)}_{K_{nlj}^{(a)}(r,\mu)} \Omega(r,\mu) dr d\mu, \tag{76}$$

ce qui définit le noyau $K_{nlj}^{(a)}(r,\mu)$ relatifs aux coefficients a.

4.5.2 Cas particulier des polynômes orthogonaux - séparabilité

Dans le cas $\mathcal{P}_j^l(m) = \mathcal{S}_{jl}^m$, on obtient une expression du noyau $K_{nlj}^{(a)}(r,\mu)$ sous la forme (Pijpers 1997):

$$K_{nlj}^{(a)}(r,\mu) = K_{nl}(r) W_{lj}^{(a)}(\mu) + L_{nl}(r) X_{lj}^{(a)}(\mu) \tag{77}$$

où $K_{nl}(r)$ et $L_{nl}(r)$ sont donnés respectivement par (34) et (35) et:

$$W_{lj}^{(a)}(\mu) = -\frac{1}{2}\frac{(4j+3)v_{2j+1}^{(l)}}{(j+1)(2j+1)} \sin\theta\ P_{2j+1}^{1}(\mu) \tag{78}$$

$$X_{lj}^{(a)}(\mu) = -j(2j+3)\ W_{lj}^{(a)}(\mu) \tag{79}$$

$v_{2j+1}^{(l)}$ est donné par (A10). Cette décomposition explicite du noyau 2D en la somme de deux noyaux séparables permet de traiter l'inversion des coefficients a d'une manière identique à celle des splittings. De plus, on note que ces noyaux sont tels que $\int_{-1}^{1} W_{lj}^{(a)}(\mu)d\mu = \delta_{j0}$ et $\int_{-1}^{1} X_{lj}^{(a)}(\mu)d\mu = 0$. En première approximation, et pour l élevé on peut donc négliger le deuxième terme de la somme (77) (cf. §3.3). Enfin notons que l'on trouve facilement les noyaux liés à l'utilisation des polynômes γ_{jl}^{m} en utilisant (A9) et que la formule (A11) permet de passer, pour l élevés, au cas où les splittings sont projetés sur des polynômes de Legendre.

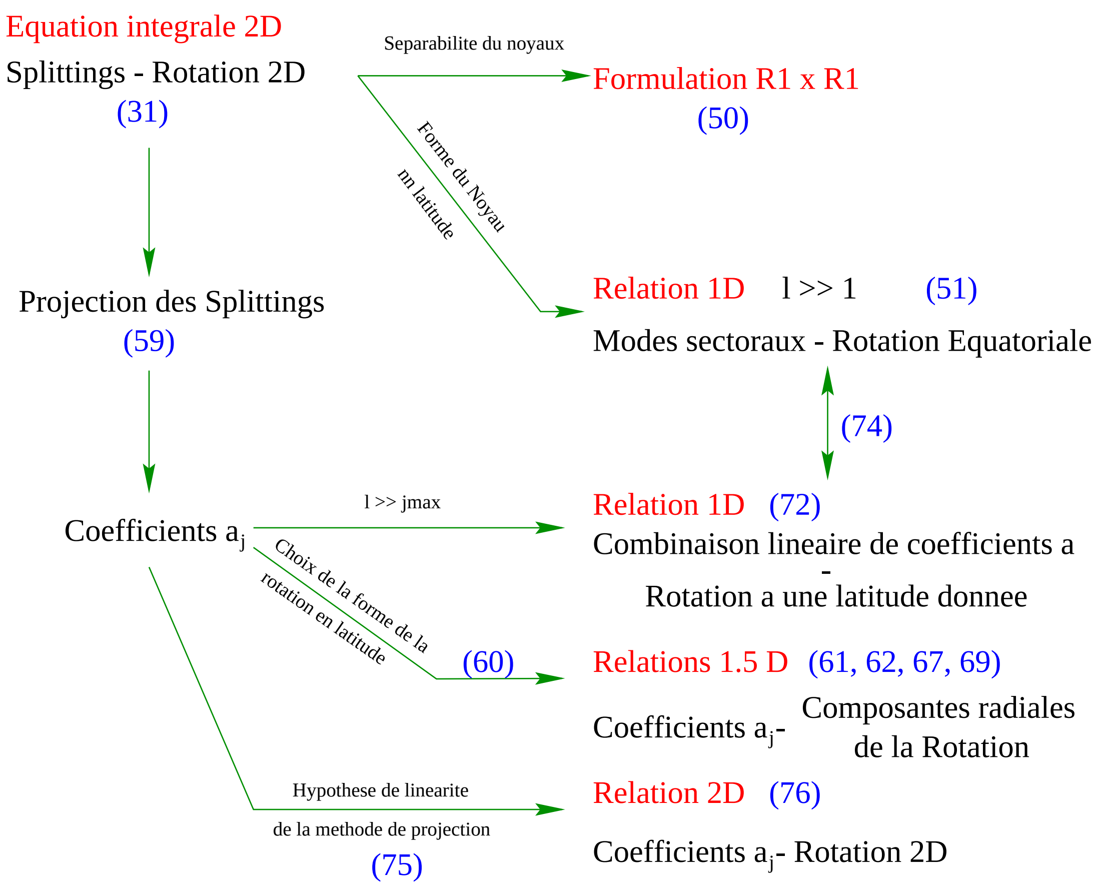


FIG. 12 – *Graphe des diverses formulations du problème inverse*

5 Méthodes d'inversion

5.1 Situation du problème

Le chapitre 2 a présenté ce que l'on appelle le *problème direct* qui consiste à prédire les observations en se donnant un modèle solaire et une rotation.

Problème direct: rotation a priori + modèle $\longrightarrow$ prédiction des observations

Le *problème inverse* au contraire a pour but d'utiliser les données observationnelles pour en déduire une propriété physique, ici la rotation interne:

Problème inverse: observations + modèle $\longrightarrow$ estimation de la rotation

Il est évident que les deux problèmes sont étroitement liés car ils utilisent le même modèle du Soleil. De plus, la résolution du problème inverse nécessite de définir un certain *critère* que doit satisfaire la solution et qui peut être basé sur l'accord entre les données prédites et les données observées et donc faire intervenir le problème direct. Nous verrons par la suite que l'on peut choisir d'autres critères locaux (cf. §5.2.1). Kirsch (1996) distingue d'une manière très générale le problème inverse du problème direct associé par le fait que le problème inverse est *mal posé* alors que le problème direct est *bien posé* au sens de Hadamard (1923). Ceci conduit à la nécessité de *régulariser* le problème en utilisant notre connaissance a priori sur la forme de la solution. Ces notions sont très largement discutées dans le cours de L. Blanc-Féraud.

Les équations intégrales permettant de résoudre le problème direct du calcul des splittings selon diverses approximations ont été détaillées aux chapitres 3 et 4 et sont résumées par le **graphe 12**.

Dans la suite de ce chapitre je me restreindrai en général au cas 1D pour la présentation des méthodes inverses qui sont facilement généralisables, dans leurs principes, au cas bidimensionnel. Les points particuliers pour lesquels le problème 2D pose des difficultés nouvelles seront néanmoins soulignés.

Il est intéressant de reprendre la classification des problèmes inverses effectuée par Menke (1989) pour situer celui concernant la rotation solaire. Il distingue trois catégories que l'on peut écrire de manière formelle par:

$$\text{problème discret} \qquad d_i = \sum K_{ij}\Omega_j + \epsilon_i \tag{80}$$

$$\text{problème continu} \qquad d_i = \int K_i(r)\Omega(r)dr + \epsilon_i \tag{81}$$

$$\text{problème intégral} \qquad d(y) = \int K(r,y)\Omega(r)dr + \epsilon(y) \tag{82}$$

où d représente les observations et ϵ les erreurs. Dans la suite ces erreurs d'observation seront supposées gaussiennes, non corrélées et d'écart type σ_i. Cette classification est basée sur l'aspect continu ou discret des données (d) et du modèle (le noyau K et la rotation Ω). Le spectre des fréquences d'oscillation étant discret et les noyaux de rotation étant des fonctions continues du rayon, il est évident que le problème lié à la rotation solaire est un problème inverse continu. L'indice i représente dans ce cas le triplet (n, l, m).

Les équations intégrales sont rencontrées dans de très nombreux domaines (voir par exemple Craig & Brown 1986) et notamment en imagerie (voir le cours de L. Blanc-Féraud). Il existe également une formulation asymptotique du problème inverse lié à la rotation solaire qui permet de passer du cas continu au cas intégral en considérant les variables $y_1 = \omega_{nlm}/L$ et $y_2 = m/L$ comme étant des variables continues. On se ramène alors à une intégrale d' Abel à 2D (voir Sekii

& Gough (1993) et les références citées). Le cas 1D pour la rotation supposée indépendante de la latitude ($y = \omega_{nl}/L$) est traité par Christensen-Dalsgaard et al. (1990) (voir aussi Christensen-Dalsgard (1997)). Enfin on note que la formulation $R^1 \otimes R^1$ (Eq. 50) nécessite la résolution d'un problème inverse intégral pour la partie latitudinale. Ce problème intégral peut également être résolu en utilisant une formulation asymptotique avec la variable $y = m/L$ supposée continue pour les degrés l élevés (Sekii 1993a, Schou et al. 1994).

Le traitement numérique d'un problème inverse continu ou intégral exige toujours que l'on se ramène au cas du problème discret. Une première étape consistera donc à discrétiser le problème par une méthode de projection ou de quadrature (voir par exemple Craig & Brown 1986) pour réduire l'intégrale à une somme discrète (cf. §5.4).

Notons enfin que le problème inverse continu peut toujours être vu comme la limite d'un problème inverse discret avec un nombre infini de paramètres. Ce problème est donc par nature sous déterminé (même si le nombre d'observables est très supérieur au nombre de paramètres cherchés) et donc la solution d'un tel problème n'est pas unique. Seule l'information a priori introduite par la régularisation permettra de choisir parmi les solutions possibles et on ne pourra obtenir que des *moyennes de la rotation* $< \Omega(r_0) >$ sur certains *domaines* autour de r_0. Ces notions liées à la *résolution* finie de toute méthode inverse seront développées par la suite.

5.2 'Critères de qualité' d'une solution

Dans cette section je définis d'une manière intuitive les 'qualités' que l'on espère pour une solution du problème inverse et je donne pour chacune de ces 'qualités' une mesure plus quantitative. Les différentes approches du problème inverse présentées par la suite se distinguent essentiellement par le choix des qualités que l'on désire le plus voir satisfaites.

5.2.1 Critères locaux

1. **Une bonne résolution**

   On souhaite que le 'domaine' autour de r_0 sur lequel on peut obtenir une moyenne $<\Omega(r_o)>$ de la rotation soit 'étroit'. Cela peut s'écrire formellement, en notant E l'espérance mathématique:

$$E(<\Omega(r_0)>) - \Omega(r_0) \longrightarrow 0 \tag{83}$$

   Pour une méthode linéaire, l'estimation en r_0 sera toujours une combinaison linéaire des données. On peut donc définir des coefficients $c_i(r_0)$ par:

$$\forall r_0 \ \exists \ c_i(r_0) \ \text{ tel que: } \ <\Omega(r_0)>= \sum_i c_i(r_0) d_i \tag{84}$$

   En remplaçant dans (81), on obtient:

$$<\Omega(r_0)>= \int \kappa(r, r_0)\Omega(r) dr + \sum_i c_i(r_0)\epsilon_i \tag{85}$$

   où l'on a défini le *noyau de résolution en* r_0 $\kappa(r, r_0)$ par:

$$\kappa(r, r_0) \equiv \sum_{i=1}^{N} c_i(r_0) K_i(r) \tag{86}$$

Les erreurs ϵ_i étant supposées sans biais, c'est à dire d'espérances mathématiques nulles, la relation (83) peut se réécrire:

$$\int \kappa(r, r_0)\Omega(r)dr - \int \delta(r - r_0)\Omega(r)dr \longrightarrow 0 \tag{87}$$

où $\delta(r - r_0)$ représente une distribution de Dirac. Cette équation montre que l'on voudrait idéalement faire tendre le noyau de résolution vers la distribution de Dirac pour avoir une bonne résolution.

On définit classiquement (Backus & Gilbert 1968) une mesure de la largeur du noyau de résolution par:

$$\mathcal{M}_m(\kappa(r, r_0)) = \int 12(r - r_0)^2\kappa(r, r_0)^2 dr \tag{88}$$

Cette 'mesure de la largeur' est telle que, si le noyau κ est une fonction porte de largeur Δr, alors la mesure de sa largeur donne Δr.

Une autre 'mesure' de la largeur d'un noyau de résolution est donnée par l'écart à une gaussienne $\mathcal{G}(r, r_0)$ centrée en r_0 et dont on se donne la largeur $\Delta(r_0)$. La 'mesure' $\mathcal{M}_s$ du noyau relativement à cette gaussienne est alors définie par:

$$\mathcal{M}_s(\kappa(r, r_0)) = \int_0^{R_\odot} \left(\kappa(r, r_0) - \mathcal{G}(r, r_0)\right)^2 dr \tag{89}$$

avec:

$$\mathcal{G}(r, r_0) = C \exp\left(-\left(\frac{r - r_0}{\Delta(r_0)}\right)^2\right) \quad \text{et: } C = 1/\int_0^{R_\odot} \mathcal{G}(r, r_0)dr \tag{90}$$

Enfin, trois autres quantités sont également utilisées pour donner la largeur du noyau de résolution: (1) la largeur totale à mi hauteur (FWHM, 'Full Width at Half Maximum', cf. **Figs. 15, 16**) , (2) la largeur de la gaussienne donnant la meilleure approximation du noyau (cf. **Fig. 19b**), (3) la distance (Δ_{qu}) entre les deux points ('quartile points') définis de telle sorte que un quart de l'aire sous le noyau de résolution soit en dessous du premier point et un autre quart au dessus du second point (cf. **Figs. 18, 19a**).

2. **Erreur sur $<\Omega(r_0)>$ faible**

   On souhaite également que l'incertitude sur $<\Omega(r_0)>$ soit faible. Avec les hypothèses précédentes sur les erreurs d'observations (cf. §5.1) et en supposant une méthode linéaire, on peut définir la variance de l'estimée $<\Omega(r_0)>$ par (cf. Eq. (84)):

$$\mathcal{V}(<\Omega(r_0)>) = \sigma^2(<\Omega(r_0)>) = \sum_{i=1}^{N} \left(c_i(r_0)\sigma_i\right)^2 \tag{91}$$

3. **Faibles corrélations entre deux estimations en deux rayons r_1 et r_2**

   Certaines régions (cœur, pôles) étant moins bien contraintes par les données que d'autres il est important que l'estimation en un rayon donné soit la plus indépendante possible de la solution trouvée ailleurs. Pour une méthode linéaire, il est possible de définir une fonction de corrélation $C(r_1, r_2)$ entre les erreurs sur $<\Omega(r_1)>$ et $<\Omega(r_2)>$, par:

$$C(r_1, r_2) = \frac{E\left[(\sum c_i(r_1)\epsilon_i)(\sum c_j(r_2)\epsilon_j)\right]}{\sqrt{E\left[(\sum c_i(r_1)\epsilon_i)^2\right] E\left[(\sum c_j(r_2)\epsilon_j)^2\right]}} = \frac{\sum c_i(r_1)c_i(r_2)\sigma_i^2}{\sqrt{\sum c_i^2(r_1)\sigma_i^2}\sqrt{\sum c_i^2(r_2)\sigma_i^2}} \tag{92}$$

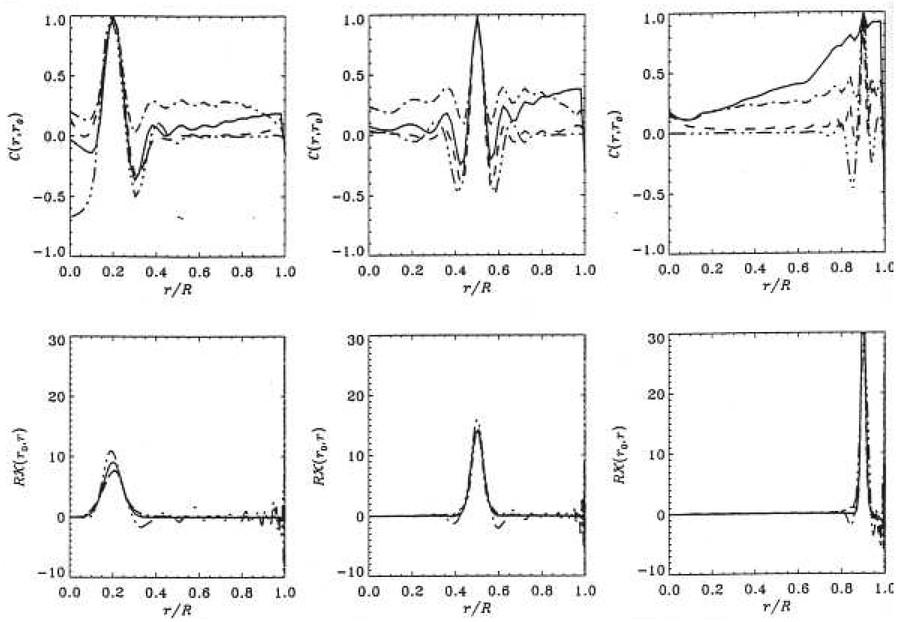


FIG. 13 – *Exemples de fonctions de corrélation (cadres du haut) et de noyaux de résolution (cadres du bas) calculés en trois rayons $r_0 = 0.2R_\odot$ (gauche),$r_0 = 0.5R_\odot$ (milieu), $r_0 = 0.9R_\odot$ (droite) pour quatre inversions différentes (cf. §§5.3 et 5.4): SOLA1(———), SOLA2(------), OLA(—·—·—·), RLS(—···—···—···). SOLA1 et SOLA2 sont deux inversions SOLA avec des paramètres de régularisation différents. D'après Howe & Thompson (1996)*

La **figure 13** donne des exemples de fonctions de corrélation pour les diverses méthodes détaillées §5.4 et 5.3. Cette figure montre que la forme de la fonction de corrélation dépend de la méthode utilisée (voir la discussion §5.6) mais présente en général un pic central de largeur comparable à la largeur du noyau de résolution. Cette propriété rend difficile l'interprétation des structures qui, dans la solution, sont du même ordre de grandeur que la résolution. En effet on ne sait pas si il s'agit de la signature d'une structure non résolue de la rotation ou simplement d'un effet dû à un artefact des erreurs d'observations qui se propagent sur cette échelle. Une discussion plus détaillée sur l'utilisation de ces fonctions de corrélation peut être trouvée dans Howe & Thompson (1996)

5.2.2 Critères globaux

1. **Accord avec les données**

   Un des premiers critères qui vient à l'esprit est la confrontation avec le problème direct: on veut, à partir de la solution $\tilde{\Omega}(r)$, pouvoir retrouver les données aux incertitudes près.

   On définit pour cela une 'mesure de l'accord avec les données' par:

$$\chi^2(\tilde{\Omega}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d_i - \int K_i(r)\tilde{\Omega}(r)dr}{\sigma_i}\right)^2 \tag{93}$$

   Idéalement, on voudrait faire tendre cette quantité vers 0 mais les erreurs sur les données étant supposées gaussiennes, non corrélées et de variance σ_i^2, l'espérance mathématique pour cette quantité est 1 soit:

$$E(\chi^2(\tilde{\Omega})) = 1 \tag{94}$$

   et c'est donc cette valeur que l'on cherchera à atteindre.

2. **Solution 'pas trop oscillante'**

   L'ensemble des splittings observés ne donnant accès qu'à une résolution limitée, il semble raisonnable d'exclure les solutions présentant de trop fortes oscillations. Celles ci peuvent cependant être produites par le bruit contenu dans les données et il convient donc de chercher uniquement des solutions qui ne soient 'pas trop oscillantes'. Pour quantifier cette 'contrainte de douceur' de la solution , on définit la 'douceur globale (en rayon) de la solution $\tilde{\Omega}$ ' par:

$$\mathcal{D}_r(\tilde{\Omega}) = \int \left| P(r) \frac{\partial^p \tilde{\Omega}}{\partial r^p} \right|^q dr \tag{95}$$

   L'ordre p de la dérivée est généralement choisi égal à 1 ou 2 et dépend de notre connaissance a priori de la solution. Avec le choix $p = 1$, minimiser (95) revient à tendre vers une solution constante alors que le choix $p = 2$ tend à favoriser une solution linéaire. Le choix et la signification de la puissance q et de la fonction de poids $P(r)$ seront discutés au §5.4.

Les méthodes d'inversion présentées dans la section suivante sont basées sur l'utilisation de ces critères mais quels que soient les critères retenus pour une méthode particulière, il est utile pour l'interprétation du résultat de regarder comment ces cinq critères sont satisfaits a posteriori pour la solution trouvée.

5.3 Méthodes locales: Optimally Localized Averages (OLA)

Il est en général possible, dans les zones suffisamment contraintes par les observations, de trouver une combinaison linéaire des noyaux de rotation qui donnent (d'après (86)) des noyaux de résolution très localisés et donc une bonne résolution. Néanmoins cela conduit en général à trouver des coefficients $c_i(r_0)$ de très grandes amplitudes afin de compenser toutes les contributions de tous les noyaux de rotation qui ont de l'amplitude loin de r_0 (cf. **Fig. 7**). D'après l'équation (91), de grandes valeurs des coefficients $c_i(r_0)$ se traduiront par une incertitude importante sur l'estimation de la rotation au voisinage de r_0. La méthode OLA ou des 'moyennes localisées' est basée sur la recherche d'un **compromis entre la résolution et la propagation des erreurs observationnelles**. Pour cela on cherche pour chaque rayon r_0 les coefficients $c_i(r_0)$ tels que:

$$< \Omega(r_0) > = \sum_{i=1}^{N} c_i(r_0) d_i \ , \qquad \kappa(r, r_0) = \sum_{i=1}^{N} c_i(r_0) K_i(r) \tag{96}$$

et qui minimisent le critère (cf. §5.2.1)

$$J^{(o)}(c_1(r_0), c_2(r_0), .., c_N(r_0)) = \mathcal{M}(\kappa(r, r_0)) + \Lambda\ \mathcal{V}(< \Omega(r_0) >) \tag{97}$$

avec la contrainte $\int_0^{R_\odot} \kappa(r, r_0) dr = 1$

Le paramètre Λ contrôle le poids relatif des deux termes dans la minimisation et joue le rôle de paramètre de régularisation. Lorsque la 'mesure' $\mathcal{M} = \mathcal{M}_m$ est utilisée, la méthode est appelée **OLA** ou méthode de Backus & Gilbert par référence aux auteurs qui ont introduit la méthode en géophysique (Backus & Gilbert 1968, voir aussi Xia & Nashed 1994) ou encore **MOLA** pour **M**ultiplicative OLA, car la mesure du noyau se fait par multiplication par une parabole (cf. Eq. (88)).
Si la mesure $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s$ est utilisée la méthode est appelée **SOLA** pour **S**ubtractive OLA (Pijpers 1992, 1994; Larsen & Hansen 1997), car la mesure du noyau se fait par différence avec une gaussienne (cf. Eq. (89)). Dans ce cas la largeur $\Delta(r_0)$ de la gaussienne est un paramètre suplémentaire à fixer. Le choix des paramètres est discuté §5.5.

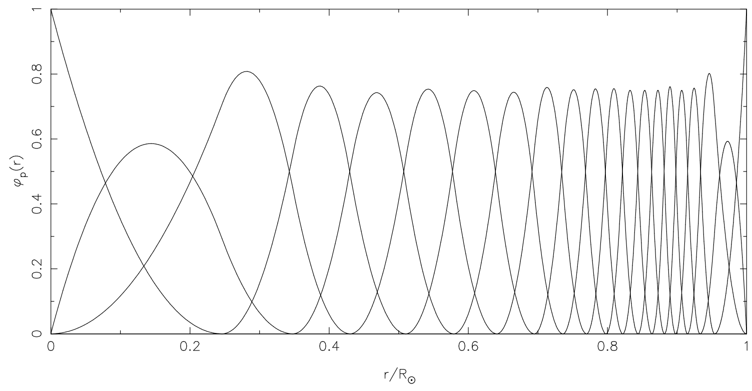


FIG. 14 – *Base de 21 B-splines d'ordre 3 (paraboles par morceaux) distribuées selon la densité des points tournants des modes observés par l'instrument LOWL entre 1994 et 1996. D'après Corbard et al. (1997)*

5.4 Méthodes globales: Regularized Least Squares (RLS)

Une solution qui donne un très bon accord avec les données est en général très oscillante car elle cherche à reproduire aussi le bruit inclus dans les données. La méthode RLS ou méthode de moindres carrés régularisée cherche à établir un **compromis entre l'accord avec les données et la 'douceur' de la solution**.

Comme nous l'avons vu, la première étape consiste à passer du problème continu à un problème discret pour son traitement numérique. Cela peut se faire par projection de la rotation sur une base de fonctions $\varphi_p(r)$ (voir Craig & Brown (1986) et Kirsch (1996) pour une revue des méthodes de discrétisation).

$$\tilde{\Omega}(r) = \sum_{p=1}^{N_p} \Omega_p \varphi_p(r) \tag{98}$$

On cherche alors les coefficients Ω_p de la projection de la rotation sur la base choisie. Pour le problème bidimensionnel, on écrira:

$$\tilde{\Omega}(r,\mu) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=1}^{N_q} \Omega_{pq} \varphi_p(r) \psi_q(\mu) \tag{99}$$

Le nombre de fonctions de base utilisées (N_p, N_q) ainsi que leur distribution constituent une forme de régularisation en ce sens qu'un faible nombre de fonctions de base ne permet en général pas de trouver une solution avec des variations rapides. La distribution des fonctions de base en rayon se fait couramment en regardant l'ensemble des points tournants associés aux modes observés. Plus le nombre de modes ayant leurs points tournants dans une région donnée sera important et plus on peut penser que cette région sera bien contrainte par les données. On augmentera donc localement la grille de discrétisation.

La **figure 5.4** montre un exemple de base constituée de $N_p = 21$ B-splines distribuées en fonction de la densité des points tournants correspondant aux modes observés par l'instrument LOWL. On remarque la faible densité de fonctions dans le cœur et dans les couches proches de la surface, ce qui correspond au faible nombre de modes observés par LOWL permettant de sonder ces zones.

Une inversion RLS se fera donc par minimisation du critère (cf. §5.2.2):

$$J(\mathbf{\Omega}) = \chi^2(\mathbf{\Omega}) + \lambda_r \mathcal{D}_r(\mathbf{\Omega}) \tag{100}$$

où $\mathbf{\Omega}$ représente le vecteur des projections Ω_p de la rotation sur la base choisie, et λ_r est un paramètre de régularisation permettant d'ajuster le compromis entre l'accord avec les données et la 'douceur' de la solution. A 2D le critère se réécrit:

$$J(\mathbf{\Omega}) = \chi^2(\mathbf{\Omega}) + \lambda_r \mathcal{D}_r(\mathbf{\Omega}) + \lambda_\mu \mathcal{D}_\mu(\mathbf{\Omega}) \tag{101}$$

où $\mathcal{D}_\mu(\mathbf{\Omega})$ représente le 'terme de régularisation' en latitude. Ceci introduit donc deux paramètres de régularisation. Le choix des paramètres est discuté au §5.5. Dans le cas bidimensionnel une contrainte de régularité peut être imposée dans le centre de telle sorte que (Corbard et al. 1997, Antia et al. 1998):

$$\lim_{r \to 0} \frac{\partial \Omega(r, \mu)}{\partial \theta} = 0 \tag{102}$$

La puissance q dans le terme de régularisation (95) est généralement choisie égale à 2 pour se ramener à un problème quadratique facile à traiter numériquement. Le méthode RLS est alors appelée *méthode de régularisation de Tikhonov* par référence à l'auteur qui a introduit cette méthode (Tikhonov 1963).

Si le terme de régularisation est choisi quadratique (c.à.d. $q = 2$ dans (95)), alors la méthode RLS est linéaire et il est possible de calculer des coefficients $c_i(r_0)$ (cf. Eq. (84)), de trouver les noyaux de résolution en chaque point de la solution (cf. Eq. (86)) et d'estimer l' erreur sur la solution obtenue en ce point (ou plus exactement l'erreur sur la moyenne définie par le noyau de résolution) ainsi que la corrélation des erreurs en plusieurs points (cf. Eqs. (91)(92)). Autrement dit **il est possible d'obtenir une interprétation locale d'une inversion RLS linéaire**.

Le choix $q = 1$ correspond à une méthode dîte de Variation Totale (TV) basée sur l'utilisation d'une norme $\mathcal{L}^1$ qui permet de préserver les variations rapides de la solution par régularisation non-linéaire (voir le cours de L. Blanc-Féraud). Ce choix a trouvé des applications dans le cas de la rotation solaire (Corbard et al. 1998a, d) pour l'étude de la 'tachocline' qui est la zone de transition entre la zone convective et l'intérieur radiatif où de forts gradients de vitesse de rotation existent (cf. §6.3).

La fonction de poids $P(r)$ peut être utilisée pour pondérer localement la 'contrainte de douceur' (Schou et al. 1994, Corbard et al. 1997). Eff-Darwich & Pérez-Hernandez (1997) ont par ailleurs développé une méthode (nommée OMD pour **O**ptimal **M**esh **D**istribution) qui cherche à optimiser le choix de la grille de discrétisation en utilisant une fonction de poids $P(r)$ adaptée à la résolution intrinsèque de l'ensemble de données à inverser.

Les **figures 15 et 16** montrent des exemples de noyaux de résolution calculés à partir d'une inversion RLS 2D des données LOWL. Ces données donnent jusqu'à 5 coefficients a par mode (donc 3 coefficients a d'indices impairs) pour décrire les splittings d'environ 1200 modes de degrés $l \leq 99$. La **figure 15** montre le résultat et les noyaux de résolution obtenus par inversion 2D RLS de ces coefficients a. La **figure 16** présente de manière identique le résultat obtenu par inversion des splittings calculés en supposant tous les coefficients a d'indices supérieurs à 5 comme étant nuls. La modification obtenue de la solution (**Fig. 15a & 16a**) ne fait que traduire l'information introduite par l'hypothèse faite sur les coefficients a d'indices supérieurs à 5 et n'est donc pas liée aux observations mais ceci permet de bien mettre en évidence la relation entre le nombre de coefficients a présents dans les données et la résolution en latitude que l'on peut atteindre. On passe d'une résolution en latitude à l'équateur de 30 à 40° avec trois coefficients a (**Fig. 15b**) à une résolution de 5 à 30° avec les splittings individuels (**Fig. 16b**). Ceci illustre par ailleurs l'intérêt de pouvoir estimer l'ensemble des splittings individuels plutôt que seulement quelques coefficients de leur développement sur des polynômes.

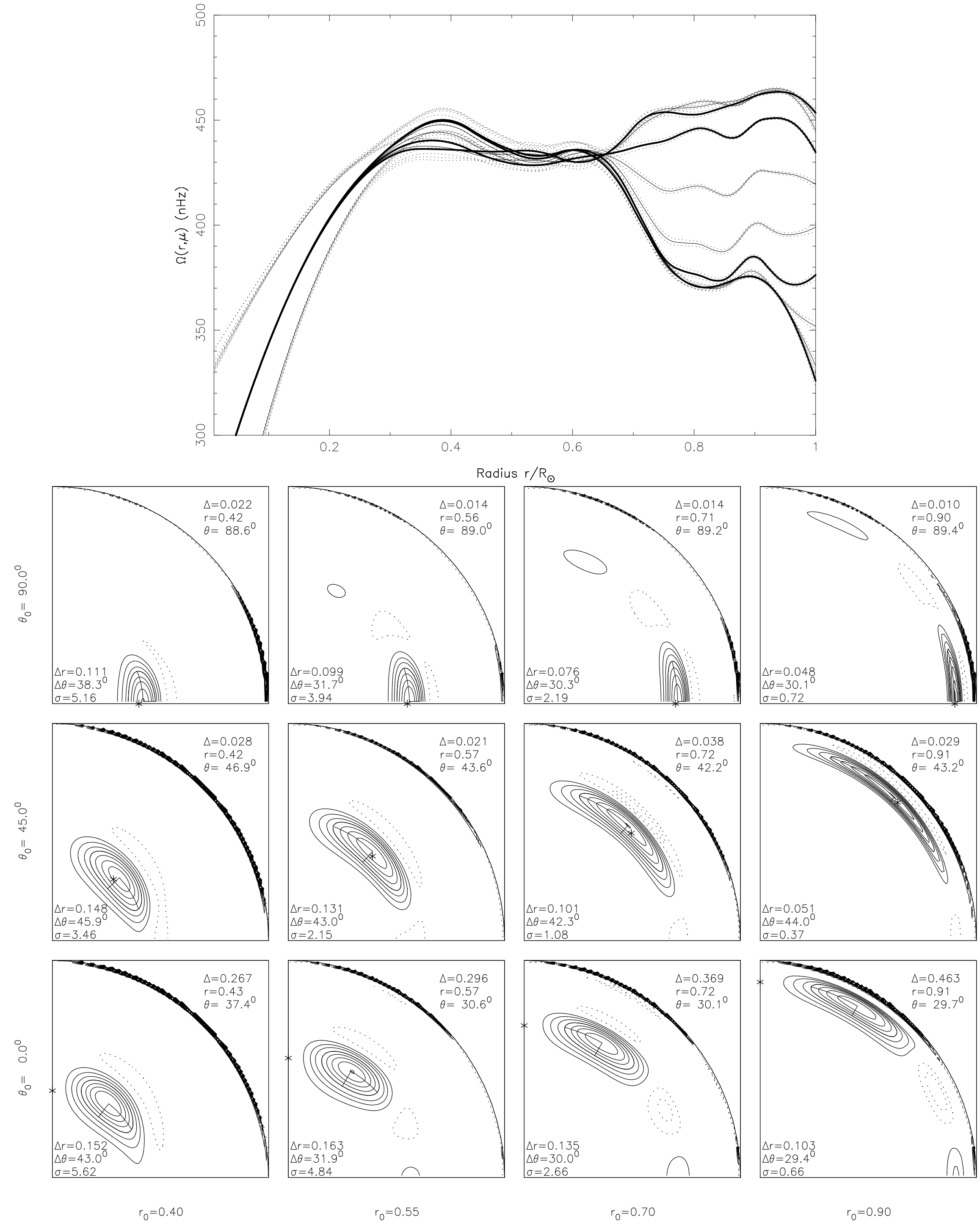


FIG. 15 – *Inversion 2D RLS des coefficients a_1, a_3, a_5 des projections sur des polynômes des splittings observés par l'instrument LOWL entre 1994 et 1996. Ces obsevations couvrent environ* 1100 *modes de degrés $l \leq 99$ avec des fréquences comprises entre $1200\mu Hz$ et $3500\mu Hz$.* **(a)** *La solution est présentée à* 10 *latitudes différentes entre l'équateur et le pôle (traits pleins) avec les erreurs à 1σ (traits pointillés), les erreurs d'observations étant supposées gaussiennes et non corélées.* **(b)** *Les noyaux de résolution 2D $\kappa(r_0, \theta_0, r, \theta)$ sont calculés pour 4 rayons r_0 et* 3 *colatitudes θ_0 différents. Δ_r et Δ_θ sont les largeurs totales en rayon et en latitude à mi hauteur du noyau de résolution (FWHM). σ donne l'erreur reportée sur le résultat (a) en chaque (r_0, θ_0). r et θ indiquent la position du maximum du noyau de résolution et Δ indique la distance de ce maximum au point (r_0, θ_0). D'après Corbard et al. (1997)*

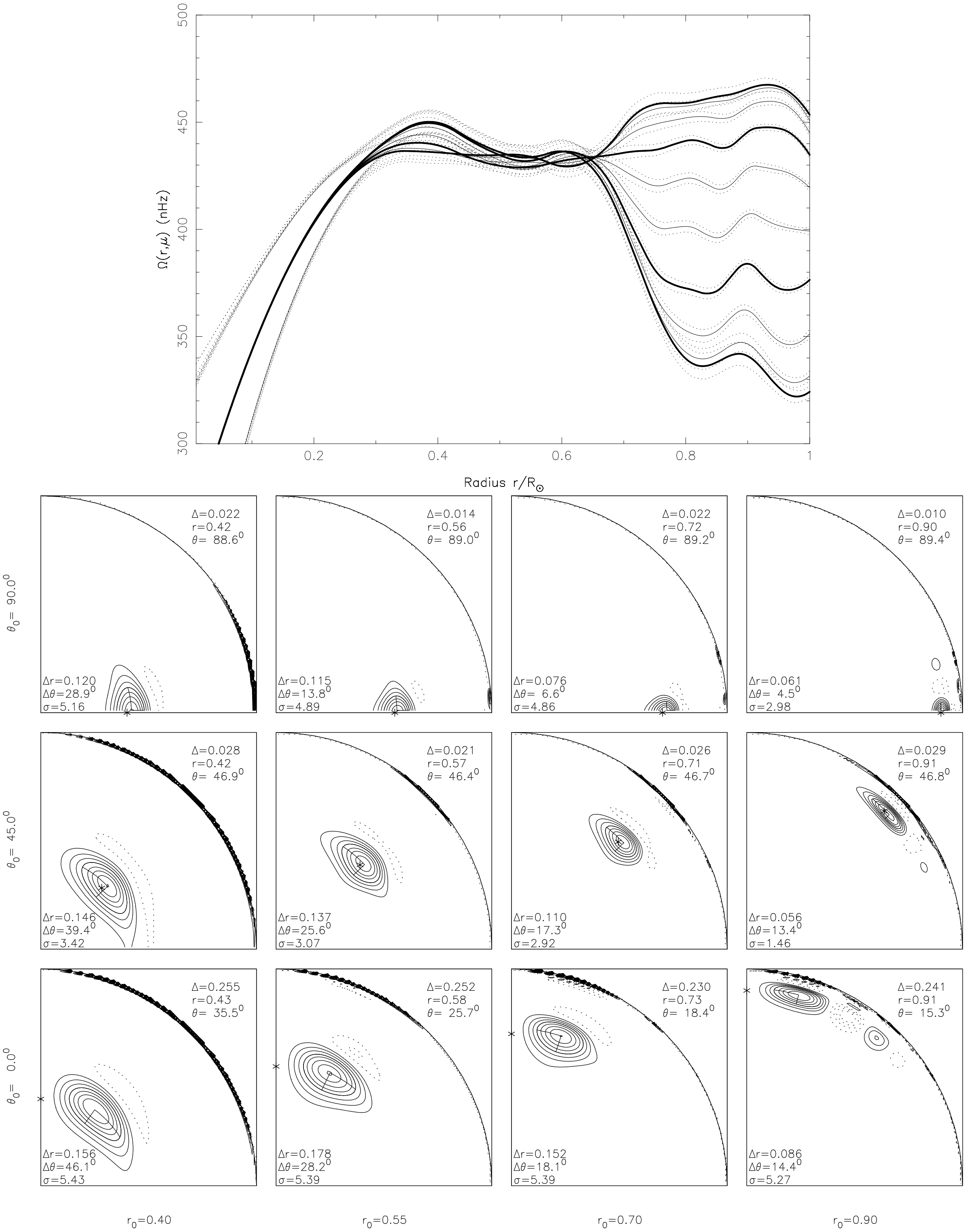


FIG. 16 – *Comme pour la figure précédente mais avec une inversion des splittings, les coefficients a inconnus (d'indices supérieurs à 5) étant supposés nuls.* **(a) La solution change principalement dans les régions polaires ($\theta < 30°$) de la zone convective ($r > 0.7R_\odot$)** *mais aussi proche de l'équateur.* **(b)** *On obtient une meilleure résolution en latitude. Ce gain en résolution est ici fictif puisqu'il ne correspond pas à des observations mais illustre l'amélioration qui peut être attendue de l'observation directe des splittings. D'après Corbard et al. (1997)*

5.5 Choix des paramètres de régularisation

Le choix des paramètres de régularisation représente une réelle difficulté des méthodes d'inversion. Il reste souvent plus ou moins empirique et il importe de toujours tester la sensibilité des résultats obtenus au choix de ces paramètres. Il faut noter que, outre les 'paramètres de compromis' intervenant dans les équations (100) (101) et (97), d'autres paramètres, spécifiques pour une méthode particulière, peuvent jouer le rôle de paramètres de régularisation.

Pour la méthode RLS nous avons mentionné §5.4 le rôle du choix du nombre et de la distribution des fonctions de bases utilisées pour projeter la rotation. L'examen des propriétés du système discrétisé (par décomposition en valeurs singulières) permet en général d'adapter le choix du nombre des fonctions de bases (cf. Christensen-Dalsgaard et al. 1993, 1994; voir aussi Corbard et al. 1995).

Pour la méthode SOLA le choix de la largeur $\Delta(r_0)$ de la gaussienne servant de mesure pour le noyau de résolution est également un paramètre de régularisation. En utilisant le fait que la résolution maximale que l'on peut obtenir en un rayon r_0 est liée à la plus petite échelle spatiale rencontrée, en ce rayon, dans l'ensemble des noyaux de rotations des modes observés, Pijpers & Thompson (1994) ont montré, que ce paramètre $\Delta(r_0)$ peut être choisi proportionnel à la vitesse du son en r_0 ($\Delta(r_o) \propto c(r_0)$).

Je ne ferai ici qu'illustrer deux des méthodes les plus employées pour le choix des 'paramètres de compromis' liés à l'inversion de la rotation solaire. Des discussions plus générales pourront être trouvées dans les revues de Badeva & Morozov (1991), Thompson & Craig (1992) et Hansen (1992, 1994). Des applications liées à l'héliosismologie se trouvent dans: Thompson (1992), Barett (1993), Stepanov & Christensen Dalsgaard (1996) et Corbard et al. (1998c, d).

5.5.1 Les "Courbes L" ou "courbes de compromis"

Les "courbes L" (Hansen 1992) sont des courbes représentant l'évolution relative des deux termes de la fonctionnelle à minimiser (cf. Eqs. (100)(101)(97)) en fonction du (des) paramètre(s) de régularisation.

Pour une méthode RLS on tracera donc l'évolution de la 'douceur' de la solution $\mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ en fonction du $\chi^2(\tilde{\Omega})$ représentant l'accord avec les données (cf. **Fig. 5.5.1**). Pour une méthode OLA on tracera l'évolution de la largeur du noyau de résolution en un rayon r_0 en fonction de l'erreur sur l'estimation $< \Omega(r_0) >$ (cf. **Fig. 18**).

Ces courbes présentent en général un 'coin' leur donnant l'aspect d'un 'L' d'où leur nom. Lorsque l'on s'éloigne de ce 'coin', le gain sur l'un des deux critères de qualité ne peut se faire que par une très forte détérioration de l'autre critère. Donc choisir un paramètre de régularisation proche du coin de la 'courbe L' revient à optimiser le compromis entre les deux critères de qualité choisis. Ce choix peut se faire a posteriori après avoir calculé des solutions pour plusieurs paramètres. Cependant cette approche nécessite de nombreuses inversions pour pouvoir construire des 'courbes L' avec suffisamment de points.

Pour la méthode RLS et à une dimension, il est possible de rendre la procédure de choix du paramètre de régularisation un peu plus automatique en définissant le choix optimal comme étant celui donnant le maximum de courbure de la courbe paramétrée que représente la 'courbe L'. L'expression de la courbure en fonction du paramètre de régularisation peut être obtenue après une décomposition en valeurs singulières généralisées (GSVD pour Generalized Singular Value Décomposition) du problème discrétisé (voir Christensen-Dalsgaard et al. (1993) et Hansen (1994)). Ceci a pour avantage de nécessiter l'équivalent d'une seule inversion pour obtenir la 'courbe L' en tout point.

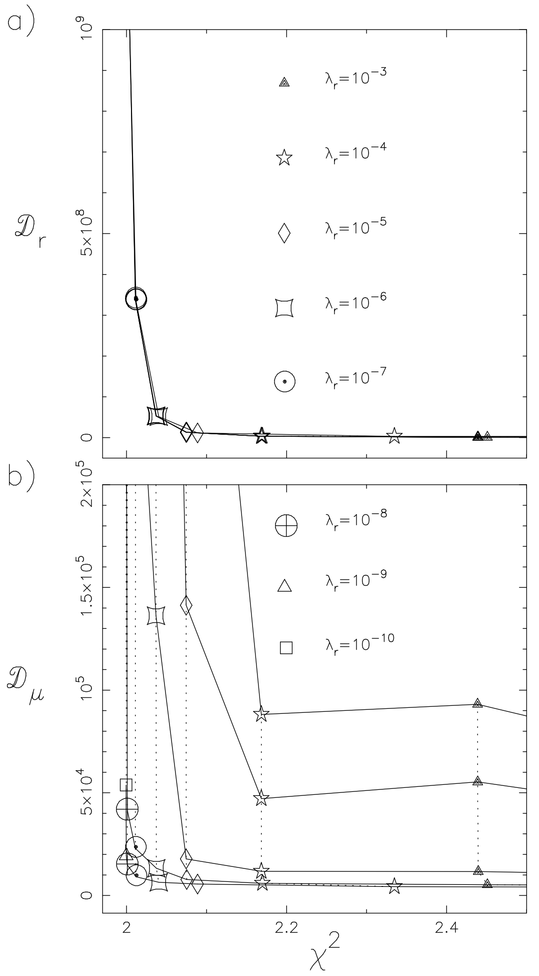
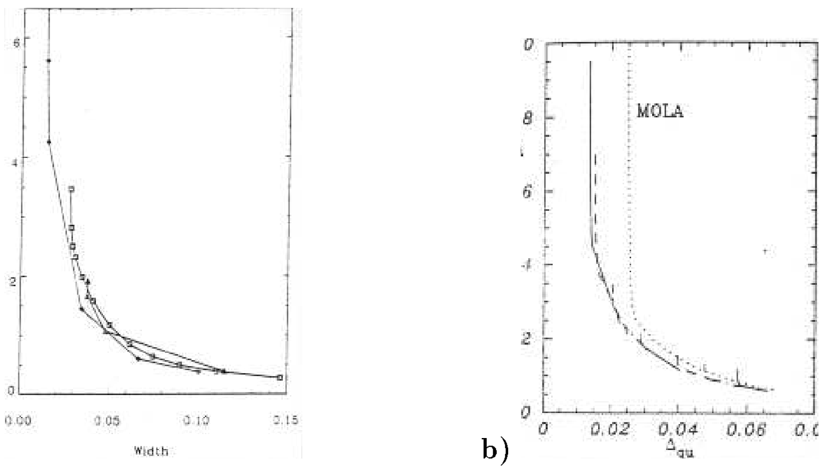


FIG. 17 – *Exemple de 'courbes L' pour le choix des paramètres λ_r et λ_μ d'une inversion 2D RLS. La mesure de la 'douceur' (voir §5.2.2) en rayon* **(a)** *et en latitude* **(b)** *de la solution est tracée en fonction du χ^2 (cf. Eq. (93)) pour différents choix des paramètres de régularisation. Les lignes pleines joignent les points de même λ_r/λ_μ, les lignes pointillées joignent les points de même λ_r. Le terme de régularisation en rayon utilise une dérivée seconde alors qu'une dérivée première est utilisée en latitude. D'après Corbard et al. (1997).*



a) **b)**

FIG. 18 – *Exemples de 'courbes L' donnant le compromis entre la résolution (Δ_{qu}: largeur des noyaux de résolution, cf. §5.2.1) et les erreurs ($\sigma(<\Omega(r_0)>)$, cf. Eq. (91)) obtenues en $r_0 = 0.5R_\odot$.* **(a)** *Les trois courbes du cadre de gauche sont pour des méthodes MOLA (carrés), RLS (losanges), et asymptotique (triangles). D'après Christensen-Dalsgaard et al. (1990).* **(b)** *Le cadre de droite donne une comparaison entre les méthodes SOLA (trait plein) et MOLA (trait pointillé). D'après Pijpers & Thompson (1994).*

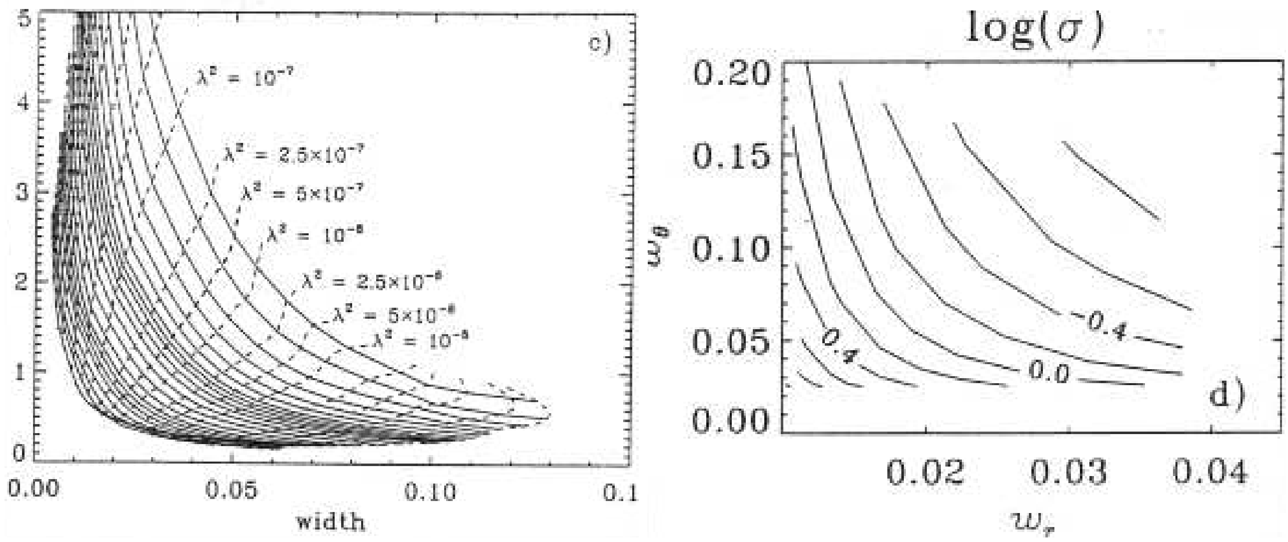


FIG. 19 – *Exemples de 'courbes L' pour une méthode RLS, basées sur l'étude du compromis résolution - erreur (de type OLA).* **(a, cadre de gauche)** *Pour une méthode RLS 1D. Chaque courbe représente le compromis à un rayon r_0 différent entre $0.25R_\odot$ (courbes du haut) et $0.94R_\odot$ (courbe du bas). Les valeurs du paramètre de régularisation $\lambda^2 = \lambda_r$ (cf. Eq. 100)) sont indiqués et les lignes pointillées joignent les points obtenus avec le même paramètre pour différent r_0. D'après Christensen-Dalsgaard et al. (1993).* **(b, cadre de droite)** *Pour une méthode RLS 2D. Le logarithme de l'erreur σ est tracé sous forme d'iso-contours en fonction des résolutions en rayon (w_r) et en latitude (w_θ) obtenues en $r_0 = 0.84R_\odot$, $\theta_0 = 45°$ par approximation du noyau de résolution par une gaussienne 2D. D'après Schou et al. (1994).*

Enfin notons que, une interprétation locale et le calcul de noyaux de résolution étant toujours possibles pour une inversion linéaire (cf. §5.4), il est également possible de baser le choix des paramètres de régularisation RLS sur des 'courbes L' de type OLA donnant le compromis résolution - erreur en un rayon r_0 donné (et une latitude donnée dans le cas 2D). La solution globale obtenue ne sera cependant optimale selon ce critère qu'au voisinage de r_0. Les **figures 18a et 19a** donnent des exemples pour une méthode RLS 1D pour différents rayons r_0 alors que la **figure 19b** donne un exemple pour une méthode RLS 2D où l'erreur est tracée en fonction des résolutions en rayon et en latitude.

5.5.2 Choix des paramètres par "Validation Croisée"

Cette méthode, introduite par Wahba (1977), donne un critère pour le choix du paramètre de régularisation qui est basé uniquement sur l'analyse des données par opposition au choix basé sur l'examen de la 'courbe L' qui, dans le cas RLS, prend aussi en compte explicitement la contrainte de douceur sur la solution. On peut résumer la démarche par les étapes suivantes:

1. On se donne un paramètre de régularisation λ
2. On supprime l'observation d_1 de l'ensemble des données puis on résout le problème inverse pour obtenir une solution $\tilde{\Omega}_{1,\lambda}(r)$
3. On calcul la donnée $\tilde{d}_1(\lambda)$ prédite par cette rotation (résolution du problème direct)
4. On fait de même (étapes 2 & 3) pour tous les modes observés un à un $\rightarrow$ On obtient un ensemble $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, .., \tilde{d}_N$ de données reconstruites.

5. On calcule $C(\lambda) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\tilde{d}_i(\lambda) - d_i)^2$

6. On réitère pour plusieurs choix du paramètres λ et on définit le choix optimal comme étant celui qui minimise $C(\lambda)$

Ce schéma illustre bien comment ce choix revient à chercher à minimiser l'impact d'une donnée individuelle (d'un splitting) sur le résultat final.

Il faut cependant remarquer que, pratiquement, cette procédure serait très lourde à mettre en œuvre car elle nécessite un grand nombre d'inversions. Il existe une généralisation de ce critère nommée **GCV** (pour '**G**eneralized **C**ross **V**alidation') basée sur le même principe mais très facile à mettre en œuvre (Golub et al. 1979, Eldén 1984).

Hansen (1992) remarque que le choix du paramètre de régularisation par la méthode GCV conduit en général à un choix proche du coin de la 'courbe L'. Il note cependant que ce choix peut ne pas conduire à une solution satisfaisante si les erreurs d'observations sont fortement corrélées.

Dans le contexte de l'inversion de la rotation solaire, Corbard et al. (1998c) ont mené une étude systématique de l'influence du choix du paramètre de régularisation sur l'estimation des paramètres de la tachocline solaire (cf. §6). Ce travail montre que le choix GCV du paramètre de régularisation conduit systématiquement à une régularisation moindre qu'avec un choix fixé au maximum de courbure de la 'courbe L'. Le choix GCV peut donc s'avérer plus pertinent pour l'étude des zones à forts gradients de vitesse de rotation angulaire qui seraient lissées par une régularisation trop importante. Plus généralement, ceci marque l'intérêt de fixer une stratégie automatique du choix du paramètre de régularisation qui soit adaptée au problème particulier que l'on veut traiter.

5.6 Comparaison RLS - OLA

5.6.1 Résolution et interprétation des résultats

Les deux types de méthodes, globales et locales, sont très couramment employés pour l'inversion de la rotation. Les deux approches sont en fait complémentaires et une comparaison des deux approches aide en général à l'interprétation des résultats (voir par exemple Thompson et al. (1996)).

Nous avons vu qu'il est possible avec une méthode RLS linéaire d'interpréter le résultat en tout point comme une moyenne localisée de la rotation sur l'étendue d'un noyau de résolution. Néanmoins, contrairement aux méthode de type OLA, la construction de ces noyaux n'est pas l'objectif premier de la méthode mais plutôt une conséquence de sa linéarité. De ce fait les noyaux de résolution obtenus avec une méthode RLS sont en général moins bien 'piqués' que ceux obtenus avec une méthode OLA. Les **figures 20 et 21** comparent les noyaux de résolution des deux types de méthodes dans les cas 1D et 2D respectivement. Les oscillations, les parties négatives et les contributions proches de la surface, présentes dans les noyaux RLS, rendent l'interprétation du résultat en terme de moyennes localisées plus difficile qu'avec les noyaux OLA.

Ceci n'est cependant pas surprenant puisque les méthodes de type OLA ont justement pour objectif de donner une interprétation en terme de moyennes localisées. Par contre ces méthodes ne permettent pas d'une manière directe d'avoir le contrôle sur la consistance avec les données, ce que donnent les méthodes globales. Il est néanmoins possible de considérer l'ensemble des estimations locales comme formant une solution globale et de calculer a posteriori une valeur de

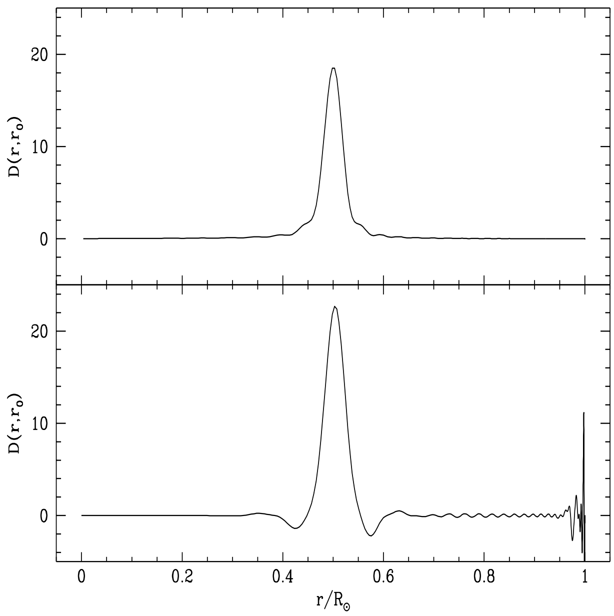


FIG. 20 – *Exemples de noyaux de résolution 1D calculés en $r_0 = 0.5R_\odot$ par une méthode* **OLA (cadre du haut)** *et une méthode* **RLS (cadre du bas)**. *Dans les deux cas le même ensemble de modes a été utilisé. D'après Sekii (1997).*

χ^2. On s'attend cependant à ce que cette valeur soit moins bonne que celle obtenue avec une méthode RLS ayant pour principal objectif de minimiser cette quantité.

Une inversion de type RLS propose une solution qui donne un bon accord avec les données sachant qu'il existe une infinité d'autres solutions qui peuvent donner un aussi bon accord. Parmi ces solutions possibles, la méthode RLS en sélectionne une en prenant en compte l'information a priori sur la rotation contenue dans le terme de régularisation. L'interprétation locale des solutions RLS nécessite donc un examen attentif des noyaux de résolution. Contrairement aux solutions OLA une simple 'barre d'erreur' horizontale représentant la largeur du noyau de résolution n'est en général que peu représentative de la complexité du noyau.

Il y a donc deux approches duales possibles pour interpréter les barres d'erreur présentées sur une solution RLS (cf. **Figs.15a 16a**). On peut considérer que l'erreur obtenue en r_0 représente l'incertitude sur la rotation $\Omega(r_0)$ mais alors on doit avoir à l'esprit que cette estimation est biaisée du fait de la résolution finie de l'inversion, ou alors cette erreur représente l'incertitude sur une moyenne (non biaisée) $<\Omega(r_0)>$ de la rotation dont l'interprétation requiert l'examen attentif du noyau de résolution. D'une manière générale l'interprétation locale d'une solution RLS peut donc s'avérer plus délicate que celle d'une solution OLA. Il faut noter cependant que l'approche RLS peut permettre, par examen des résidus (c.à.d. de chacun des termes constituant la somme du χ^2), de détecter des erreurs sous-estimées dans les données et donc de faire des aller retour entre observations et inversions permettant de confirmer ou d'infirmer l'estimation des incertitudes sur certaines observations.

Enfin notons que si les ailes négatives des noyaux RLS peuvent compliquer l'interprétation locale de la solution, elles peuvent aussi (dépendant de la forme réelle de la rotation) conduire à une meilleure solution par un jeu d'interpolations et d'extrapolations où les ailes négatives compensent en partie l'effet de lissage dû à la largeur non nulle du pic central. De plus l'examen des fonctions de corrélation (**Fig. 13**) montre l'existence de plus fortes corrélations avec des méthodes OLA qu'avec la méthode RLS. Ces corrélations peuvent être liées à l'absence de pics de surface sur les noyaux de résolution OLA. En effet pour éliminer ces pics, on utilise

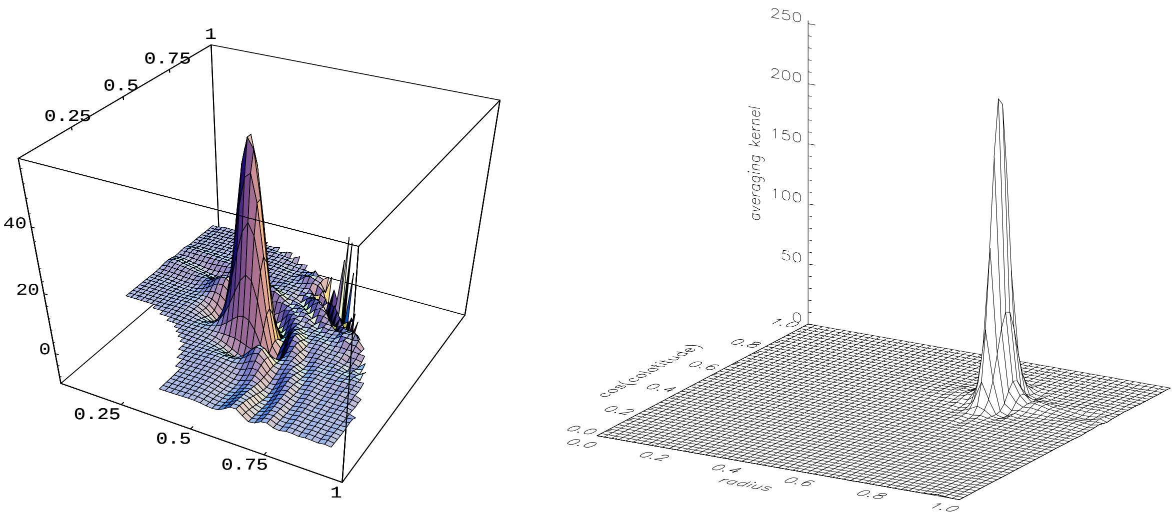


FIG. 21 – *Exemples de noyaux de résolution 2D.* **A gauche**, *un noyau obtenu en* ($r_0 = 0.55R_\odot$, $\mu_0 = 0.707$) *par une méthode* **RLS** *(graphique polaire) à partir des modes observés par BBSO (soit* ~ 2300 *coefficients a pour des modes* $5 \leq l \leq 60$*). D'après Corbard et al. (1995).* **A droite**, *un noyau obtenu par une méthode* **OLA** $R^1 \otimes R^1$ *en* $r_0 = 0.7R_\odot$, $\mu_0 = 0.707$ *à partir de données simulées comprenant* 70000 *splittings ayant des degrés jusqu'à* $l = 250$ *(simulation de données GONG). D'après Sekii (1997). Il est à noter que les deux résultats ne sont pas directement comparables car le rayon* r_0 *ainsi que l'ensemble des modes utilisés diffèrent. Le manque de modes de degrés élevés dans les données BBSO peut notamment être en partie à l'origine des pics obtenus en surface par la méthode RLS. Néanmoins, d'après la figure précédente, ceux-ci restent une caractéristique de la méthode RLS.*

principalement les modes de degrés élevés qui restent confinés sous la surface solaire. Si ces mêmes modes sont utilisés de manière similaire pour tous les rayons r_0, cela introduit des corrélations importantes entre les erreurs sur la solution à des rayons assez distants. Cet effet peut cependant être minimisé par le choix des paramètres de régularisation (cf. **Fig 13**).

5.6.2 Aspects numériques

Il est important de noter que les différentes méthodes n'ont pas le même 'coût' numérique. Prenons le cas d'un problème 1D avec par exemple $N = 1000$ splittings sectoraux à inverser. Si l'on veut une solution sur une grille de $N_p = 50$ points, une méthode MOLA nécessitera N_p inversions d'une matrice $N \times N$ alors qu'une méthode RLS donne la solution en tous les points de grille avec seulement une inversion d'une matrice $N_p \times N_p$. Cela conduit à un rapport du nombre d'opérations d'environ $\frac{N_p \times N^3}{N_p^3} = 4\ 10^5$. Dans le cas 2D avec, par exemple, $N = 50000$ splittings et une grille $N_p \times N_q = 500$, ce rapport passe à $5\ 10^8$ ce qui rend l'utilisation directe de la méthode MOLA pratiquement impossible. La méthode SOLA par contre présente le gros avantage de ne nécessiter que l'équivalent de l'inversion d'une matrice de taille $N \times N$ pour obtenir la solution en différents points, ce qui la rend toujours plus coûteuse qu'une méthode RLS mais moins qu'une méthode MOLA.

Pratiquement, à 2D, on utilise donc soit une méthode RLS soit une méthode SOLA qui peut être implémentée de manière très efficace en utilisant la formulation $R^1 \otimes R^1$ du problème inverse (Pijpers & Thompson 1996, Larsen 1997, Larsen & Hansen 1997).

6 Résultats obtenus: principales caractéristiques de la rotation solaire

La **figure 22** donne un exemple de profil de rotation obtenu par inversion 2D RLS des observations de l'instrument MDI à bord de SoHO. Il est bien évident, au regard des discussions des chapitres précédents, qu'une telle figure n'est pas suffisante pour interpréter complètement le résultat. Il faudrait notamment regarder précisément comment les cinq 'critères de qualité' définis §5.2 sont satisfaits et comparer l'utilisation de plusieurs méthodes. Un telle étude complète ne peut cependant pas être présentée dans ce cours. Je ne donnerai ici que les principales caractéristiques de la rotation solaire telles qu'elles se dégagent globalement des inversions des observations héliosismiques récentes. Des études plus détaillées concernant l'inversion des splittings observés par GONG et MDI pourront par exemple être trouvées dans (Thompson et al. 1996; Korzennik et al. 1997) et (Schou et al. 1998) respectivement.

6.1 Rotation des couches superficielles et de la zone convective

Les solutions trouvées par inversions des splittings pour la rotation de surface sont compatibles (Voir Corbard et al. 1997, Kosovichev & Schou 1997) avec les observations directes du plasma photosphérique par analyse Doppler des raies spectrales (Snodgrass & Ulrich 1990, Snodgrass 1992). Proche de l'équateur, il existe, juste sous la surface, un gradient de la rotation angulaire. Celle-ci augmente d'environ 10nHz pour atteindre un maximum d'environ $465nHz$ autour de $0.095R_\odot$ à l'équateur (Corbard et al. 1997, Schou et al. 1998). Ce maximum de vitesse de rotation correspond à la vitesse déduite de l'observation des petites structures magnétiques en surface (Komm et al. 1993, cf. **Fig. 2**). Ceci semble donc suggérer que ces structures peuvent être ancrées aux environs de $0.95R_\odot$. L'étude de la rotation différentielle des zones situées juste sous la photosphère et la comparaison avec les observations de surface sont facilitées par l'analyse des modes fondamentaux ('modes f', c.à.d. d'ordre radial $n = 0$) qui sont piégés juste sous la surface. Ces modes ont pu être analysés à partir des observations de l'instrument MDI pour les degrés compris entre $l = 120$ et $l = 250$ (Kosovitchev & Schou 1997).

La rotation différentielle de surface se maintient dans toute la zone convective ($r > 0.7R_\odot$). L'équateur fait un tour tous les 25 jours environ ($\Omega/2\pi \simeq 460$ nHz) alors que les zones polaires mettent environ 35 jours ($\Omega/2\pi \simeq 330$ nHz) pour effectuer une révolution complète. Les courbes d'iso-rotation sont donc essentiellement radiales dans toute la zone convective. Ceci va à l'encontre de certaines simulations numériques de la convection dans des couches en rotation (Gilman et Miller 1986; Glatzmaier 1987) qui prédisaient une rotation constante sur des axes parallèles à l'axe de rotation. Depuis la mise en évidence de ce désaccord de nombreuses études théoriques de la rotation différentielle (voir par exemple Küker et al. 1993, Hiremath & Gokhale 1995) et de la rotation associée aux mouvements de convection turbulente (Brummell et al. 1998) ont été menées qui peuvent conduire à un meilleur accord avec les observations héliosismiques. Cependant les hypothèses sous jacentes à ces modèles et simulations numériques restent difficiles à vérifier ou assez éloignées des conditions réelles rencontrées dans le Soleil. La compréhension de la rotation différentielle de la zone convective solaire reste donc une question très largement ouverte et d'actualité.

Il est à noter que la **figure 22** montre une zone étroite près du pôle (à environ 15° de colatitude) qui présente un maximum local de rotation autour de $0.95R_\odot$. L'existence de ces structures (ou 'jets') est importante à mettre en évidence si elles existent car elles sont prédites par certaines simulations numériques et sont attendues par la comparaison avec l'observation des planètes géantes Jupiter et Saturne qui sont également des objets en rotation avec d'importants mouvements de convection (Toomre & Brummel 1995). Ces structures, suspectées pour la

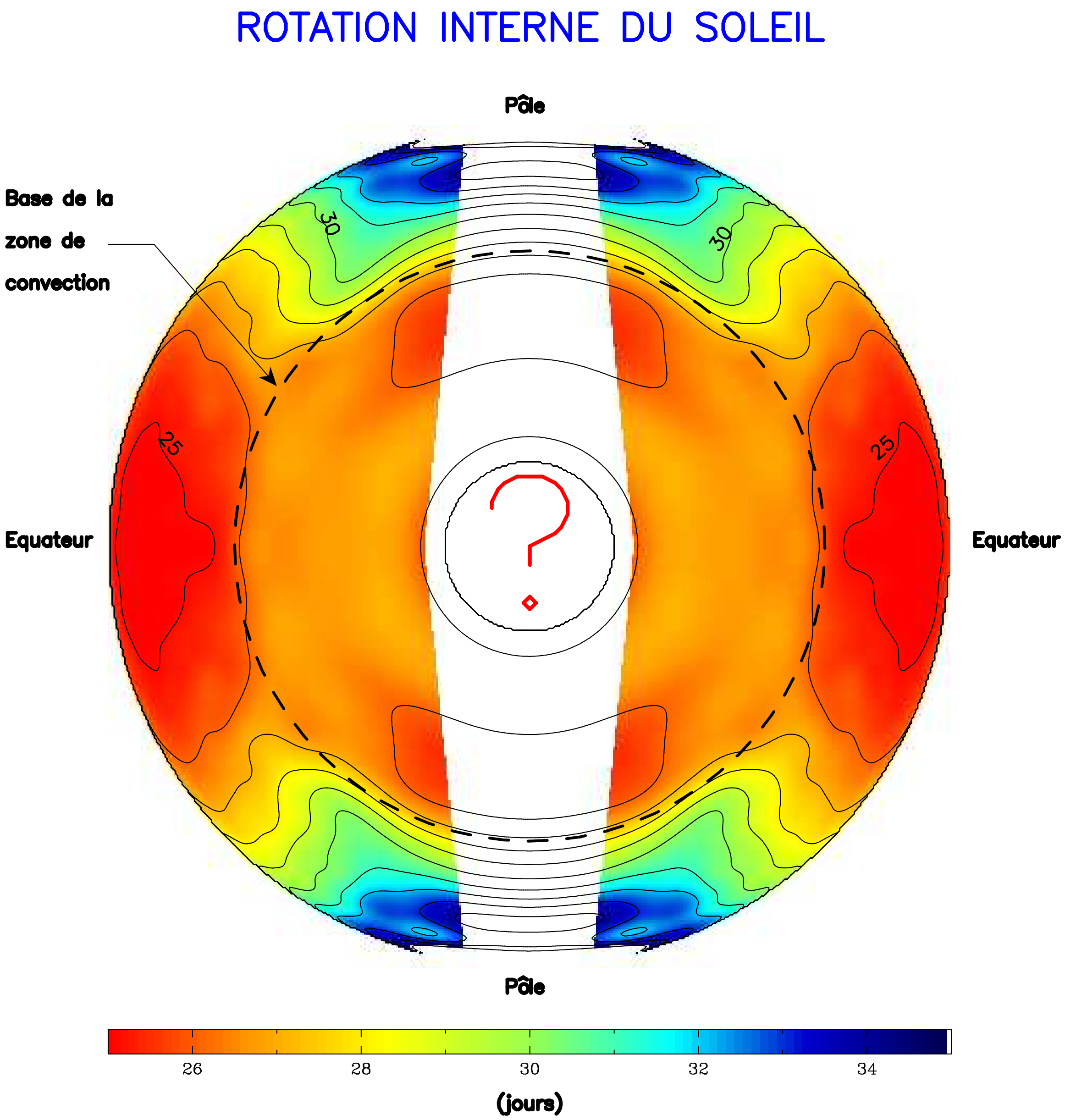


FIG. 22 – *Le résultat présenté ici sous forme de courbes iso-rotation sur une coupe en profondeur de la sphère solaire, a été obtenu par inversion 2D RLS des données acquises durant les 144 premiers jours d'observation de l'instrument MDI à bord du satellite SoHO. Ces observations donnent les splittings de 1673 modes de degrés* $l \leq 250$ *sous la forme de coefficients a jusqu'à* a_{36}. *Les résultats sur l'estimation de la rotation du coeur et des zones polaires demeurent incertains et ne sont représentés sur ce graphique que par des iso-contours (sans couleur) qui peuvent être considérés en grande partie comme des extrapolations des résultats obtenus dans les autres zones.*

première fois avec les données MDI, restent cependant à la limite de résolution et ne semblent pas être mises en évidence par les inversions de type OLA (Schou et al. 1998, Howe et al. 1998). Ce résultat doit donc être pris avec précaution et ces études devront être poursuivies dans le futur avec de nouvelles données permettant une meilleure résolution.

6.2 Rotation de la zone radiative

Dans la zone radiative, entre la base de la zone convective et jusqu'à une profondeur de $0.2R_\odot$, la rotation est quasiment rigide, indépendante de la latitude avec une valeur correspondant à la rotation de surface à mi-latitude soit $\Omega/2\pi \simeq 330$ nHz. Là encore plusieurs théories sont toujours en compétition pour expliquer à la fois l'indépendance de la rotation en fonction de la latitude et la valeur de 330nHz trouvées par l'héliosismologie.

L'hypothèse la plus souvent évoquée pour expliquer la rotation solide de l'intérieur radiatif est l'existence d'un champ magnétique mais si celui-ci s'étend dans la zone convective, le couplage des deux régions devrait tendre à induire une rotation différentielle en latitude également dans la zone radiative (cf. Charbonneau & MacGregor 1993). Un hypothèse possible (Gough 1997) est alors que la circulation dans la zone de transition (la tachocline) soit telle que le couplage ne se fasse que à des latitudes moyennes où il n'y a pas de gradient de rotation entre zone convective et zone radiative (cf. **Fig. 22**).

Une autre approche développée simultanément par Zahn et al. (1997) et Kumar & Quataert (1997) est de considérer le transport du moment angulaire par des ondes de gravité générées à la base de la zone convective (Voir le cours de P. Kumar). Ce processus s'avère suffisamment efficace pour réduire la rotation du Soleil au cours de son évolution jusqu'à la valeur actuellement observée (ou plus exactement déduite par inversion des données héliosismiques) et tend également à produire une rotation rigide de la zone radiative sans invoquer l'existence d'un champ magnétique (Talon & Zahn 1998).

6.3 La tachocline

La zone de transition rapide entre les deux régimes de rotation (différentielle et rigide) est nommée **tachocline** et est probablement le siège de la dynamo solaire. Elle fait actuellement l'objet de nombreuses études théoriques (Spiegel & Zahn 1992, Elliot 1997). Les caractéristiques (voir **tableau 2**) de la tachocline qui peuvent être déduites des observations héliosismiques constituent des contraintes importantes pour les études théoriques de la dynamique interne.

- Le centre r_c et la largeur w de la tachocline déterminent la zone dans laquelle peuvent se produire des instabilités et des possibilités de mélange des éléments chimiques.

- Par ailleurs, le rapport de la largeur sur la position de la tachocline (w/r_c) peut être relié directement au coefficient de viscosité horizontale et constitue donc une contrainte importante pour la modélisation de la turbulence (Spiegel & Zahn 1992).

- Le rapport Ω_0/Ω_1 de la vitesse de rotation de la zone radiative sur la vitesse de rotation dans la zone convective est également un test important qui permet de différencier la théorie mettant en jeu un champ magnétique (Gough, 1985) de celle de Spiegel & Zahn (1992) basée sur les propriétés de la turbulence à l'intérieur de la tachocline pour expliquer la rotation rigide de la zone radiative (Voir Gough 1997, Gough & Sekii 1998).

Les méthodes inverses habituelles avec régularisation de Tikhonov tendent à éliminer les variations rapides de la solution et ne permettent pas, avec les observations actuelles, de résoudre

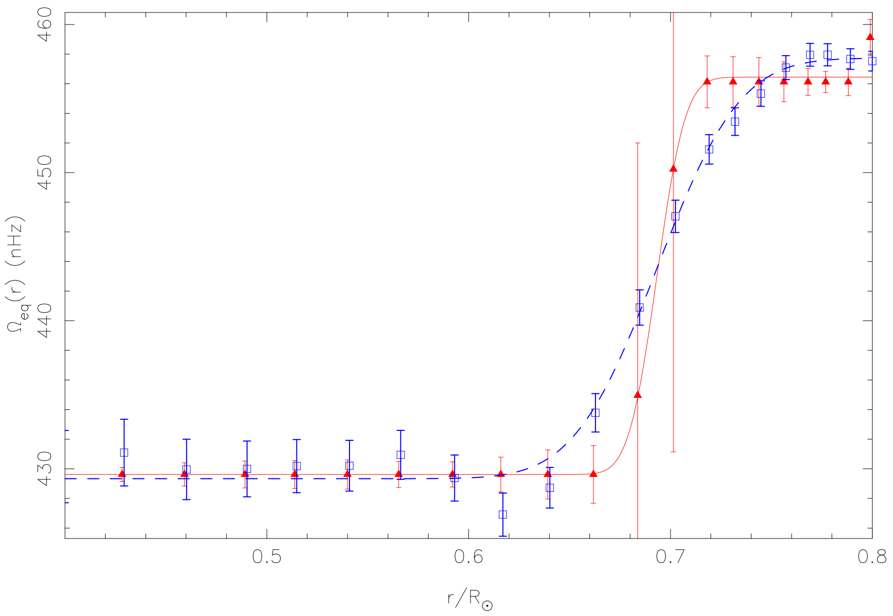


FIG. 23 – *Exemples de profil équatorial de la rotation solaire entre $0.4R_\odot$ et $0.8R_\odot$ obtenus à partir des données LOWL par deux méthodes d'inversion. Les carrés donnent la solution RLS avec régularisation de Tikhonov et les triangles une solution RLS avec un terme de régularisation non linéaire utilisant la norme $\mathcal{L}^1$ qui tend à préserver les discontinuités. Les lignes pointillées et pleines représentent respectivement les approximations par une fonction erf de la solution linéaire et de la solution non linéaire. Les barres d'erreurs sur la solution non linéaire sont calculées en supposant la méthode linéaire. Des erreurs plus réalistes sur les paramètres de la tachocline peuvent être obtenues par simulation de Monte-Carlo. D'après Corbard et al. (1998c)*

la tachocline. Il est néanmoins possible de préciser les caractéristiques de cette zone à partir des observations. Pour cela trois approches sont envisageables:

1. **Une 'analyse directe'** dans laquelle on suppose connue la forme générale de la rotation et on modélise la transition avec peu de paramètres (par exemple les quatre paramètres d'une fonction erf (cf. Tab. 2), voir aussi Antia et al. 1998) que l'on ajuste au mieux avec les données. Il s'agit en fait d'inversions non linéaires avec très peu de paramètres.

2. **Une 'déconvolution locale'** encore appelée méthode de 'super-résolution' (Thompson 1998). Pour cela on suppose que l'équation (85) peut être assimilée localement par une convolution et on utilise l'information sur les noyaux de résolution pour déconvoluer le résultat (Charbonneau et al. 1998a, Corbard et al. 1998c).

3. **L'utilisation d'une régularisation non linéaire** (Corbard et al. 1998a, d) Ces méthodes d'inversion adaptatives, similaires à celles couramment utilisées en imagerie (voir le cours de L. Blanc-Féraud), permettent de préserver les variations rapides de la solution. La **figure 23** compare le résultat d'une inversion avec régularisation de Tikhonov (linéaire) à celui obtenu avec une régularisation non linéaire.

La **table 2** présente seulement les premiers résultats obtenus. Ceux-ci devront être confirmés et précisés par les nouvelles observations et le développement de nouvelles techniques d'analyse. Les premiers résultats (préliminaires) obtenus à partir de ces analyses semblent indiquer que:

- Le centre de la transition est sous la limite de stratification adiabatique de la zone convective ($0.713R_\odot$) (Basu & Antia 1997)

Auteurs	$r_c/R_\odot$	$w/R_\odot$	Ω_0/Ω_1
Corbard et al. (1998c)	0.695 ± 0.005	0.05 ± 0.03	0.94 ± 0.01
Charbonneau et al. (1998a)	0.704 ± 0.003	0.050 ± 0.012	
Kosovichev (1996, 1998)	0.692 ± 0.005	0.09 ± 0.04	

TAB. 2 – *Principales caractéristiques de la tachocline par approximation de la rotation par une fonction de la forme:* $\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_0)\left(1 + erf\left(2\frac{r-r_c}{w}\right)\right)$.

- La transition est très étroite (très probablement $< 0.1R_\odot$).
- Le rapport Ω_0/Ω_1 est intermédiaire entre les deux prédictions théoriques de Gough (1985) et Spiegel & Zahn (1992).

La connaissance de la forme, en rayon et en latitude, de la tachocline représentant un enjeu majeur pour notre compréhension de la dynamique interne, son étude à partir des observations héliosismiques fait actuellement l'objet de nombreux travaux (Antia et al. 1998; Charbonneau 1998, Charbonneau et al. 1998b; Corbard et al. 1998a, d; Elliot & Gough 1998a, b).

6.4 Rotation du coeur

La large dispersion des mesures (cf. **Fig. 24**) résultant des différentes observations des splittings de bas degrés et des différentes méthodes d'analyse (voir le cours d'E. Fossat, voir aussi Appourchaux (1998)) rendent les estimations de la rotation du cœur solaire par inversion encore très incertaines (Voir par exemple la revue de Eff-Darwich (1998)).

Je ne ferai ici qu'illustrer les difficultés rencontrées en donnant quelques exemples (**Fig. 25**) d'inversion 2D RLS de splittings de bas degrés. La forme des noyaux de résolution (**Fig. 26**) rend l'interprétation des résultats très difficile. Les méthodes de type OLA peuvent produire des noyaux plus piqués mais l'application aux diverses observations conduit toujours à des résultats assez différents (voir par exemple Corbard et al. 1998e) dont les exemples de la **figure 25** (en prenant en compte les barres d'erreurs) sont assez représentatifs.

Dans le cadre du traitement et de l'interprétation des splittings de bas degrés , il est intéressant et nécessaire d'étudier plus en détails les trois sources d'incertitudes identifiées d'une manière générale par Korzennik et al. (1997) (Voir aussi Thompson 1998).

1. **Les incertitudes venant des différentes méthodes d'analyse du spectre.**
   L'extraction des splittings du spectre des oscillations constitue en lui même un problème inverse non linéaire dont la résolution n'est pas triviale. Des biais peuvent être introduits par une modélisation mal adaptée du spectre (prise en compte de l''entrelacement des modes' par la 'leakage matrix') ou du profil des pics (prise en compte de l'asymétrie) ou par le fait que les méthodes non linéaires peuvent occasionnellement converger vers des minima locaux (Voir le cours d'E. Fossat).
2. **Les différences venant de l'inversion des différentes observations.**
   Des différences systématiques subsistent entre des observations qui comme GONG ou BiSON tendent à donner une rotation du cœur légèrement plus lente que la rotation de la zone radiative et celles, comme IRIS ou GOLF, qui tendent à donner une rotation du cœur plus rapide (Voir par exemple Di Mauro et al. 1998). Des biais peuvent cependant être introduits par le fait que les observations comparées ne couvrent pas toujours la même période. Là encore une comparaison systématique des spectres pour des observations

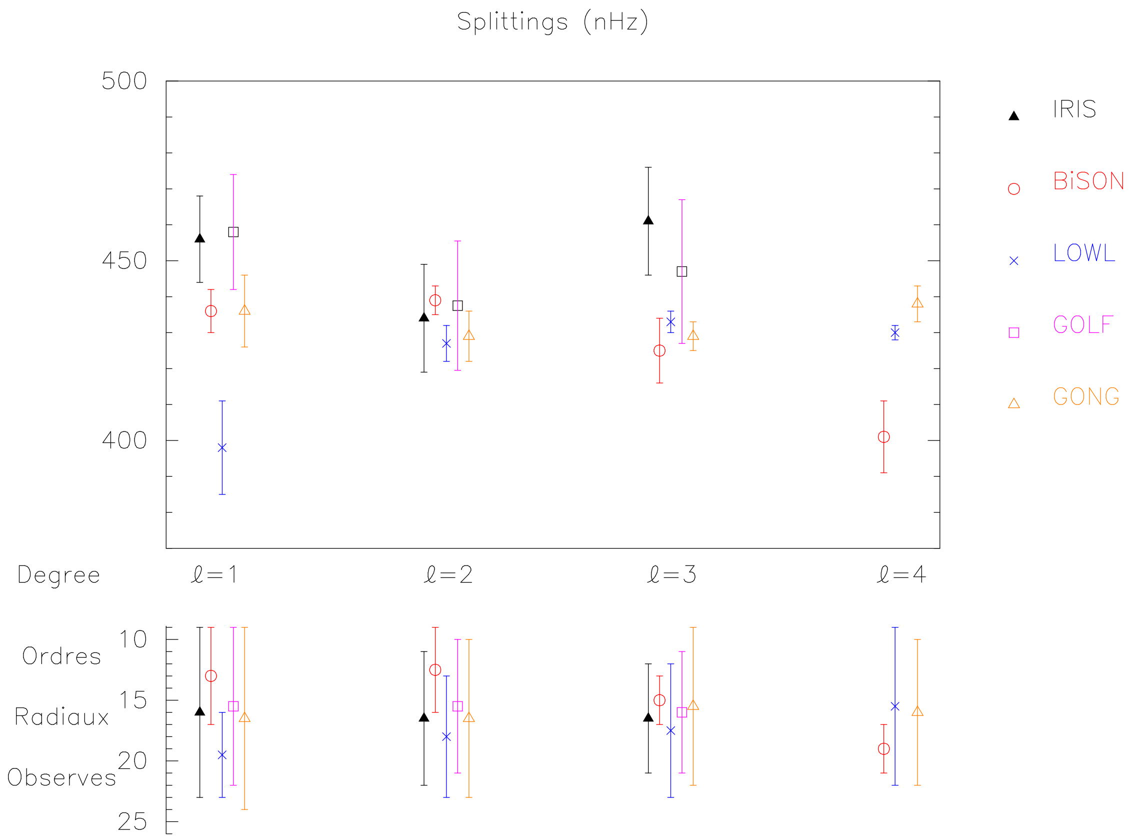


FIG. 24 – *Moyenne pondérée des splittings de bas degrés obtenus à partir de différentes observations. Les ordres radiaux observés et sur lesquels se font la moyenne sont indiqués en bas de la figure. D'après Corbard (1997)*

- *Les mesures* **IRIS** *couvrent une période de 19 mois d'observations avec quatre séries temporelles obtenues en 1989, 1990, 1991 et 1992 (Gelly et al. 1996). Les splittings IRIS montrés ici sont des moyennes pondérées de résultats obtenus par plusieurs méthodes appliquées aux mêmes spectres moyennés (Lazrek et al. 1996).*

- *Les données* **BiSON** *ont été acquises entre le 01/05/93 et le 23/08/94 par Chaplin et al. (1996).*

- *Les splittings* **LOWL** *ont été calculés à partir de données couvrant deux ans d'observations entre le 26/02/94 et le 25/02/96 (communiquées par S. Tomczyk, accessibles sur: http://www.hao.ucar.edu/public/research/mlso/LowL/data.html).*

- *Les données* **GONG (l=1,2)** *ont été analysées par T. Appourchaux & C. Rabello Soares à partir des observations faites entre le 26/02/95 et le 26/02/96 (communication privée). Les splittings* **GONG (l=3,4)** *couvrent 7 mois d'observations (GONG 4-10) (communiqués par l'équipe GONG).*

- *Les splittings* **GOLF** *ont été estimés par M. Lazrek à partir des 8 premiers mois d'observations (11/04/96-31/12/96) de l'instrument GOLF (communication privée).*

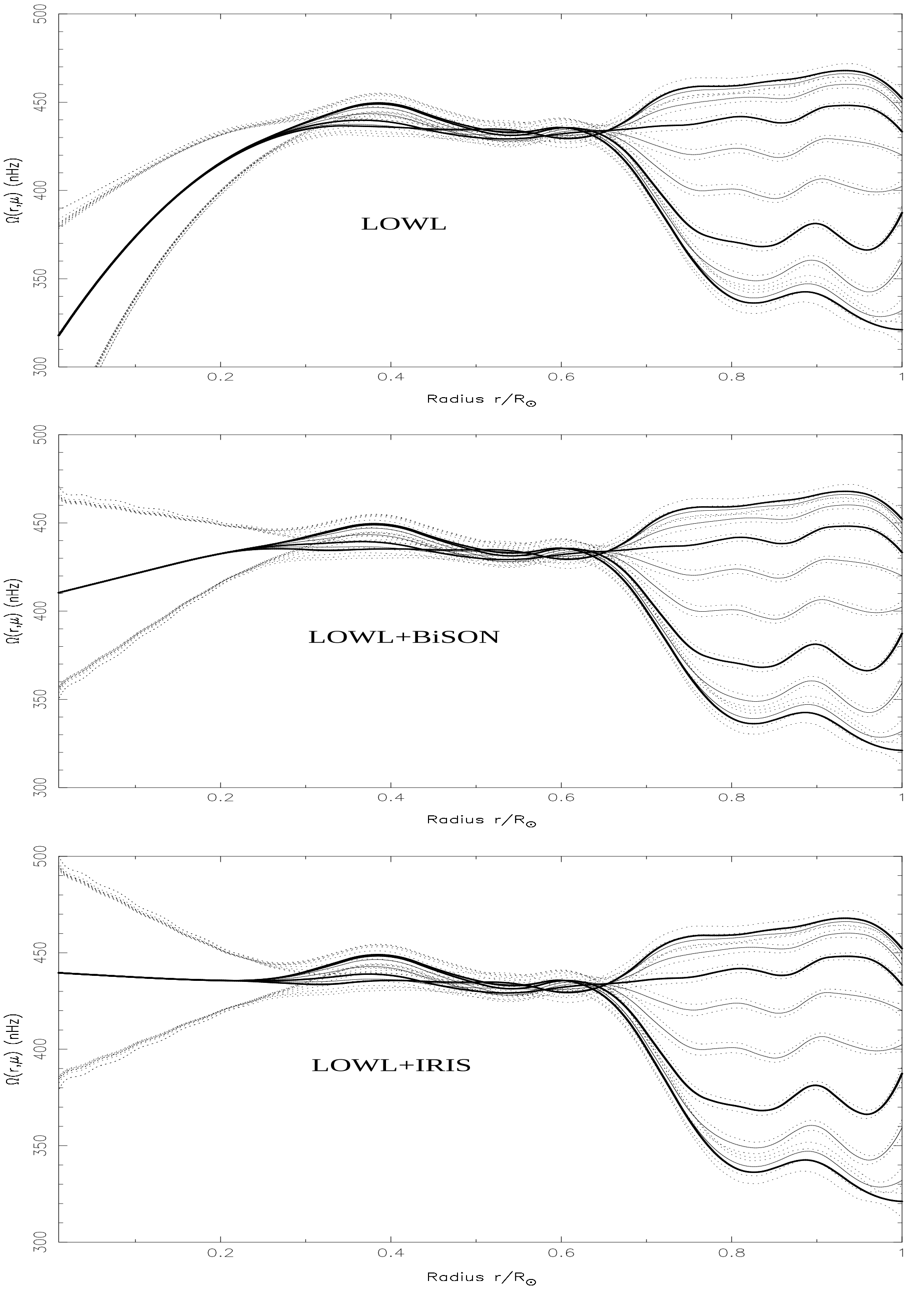


FIG. 25 – *Ces figures, obtenues par inversion 2D RLS des données indiquées, montrent la sensibilité de la méthode d'inversion aux diverses données disponibles pour les splittings de bas degrés (cf. Fig. 24). D'après Corbard et al. (1998b)*

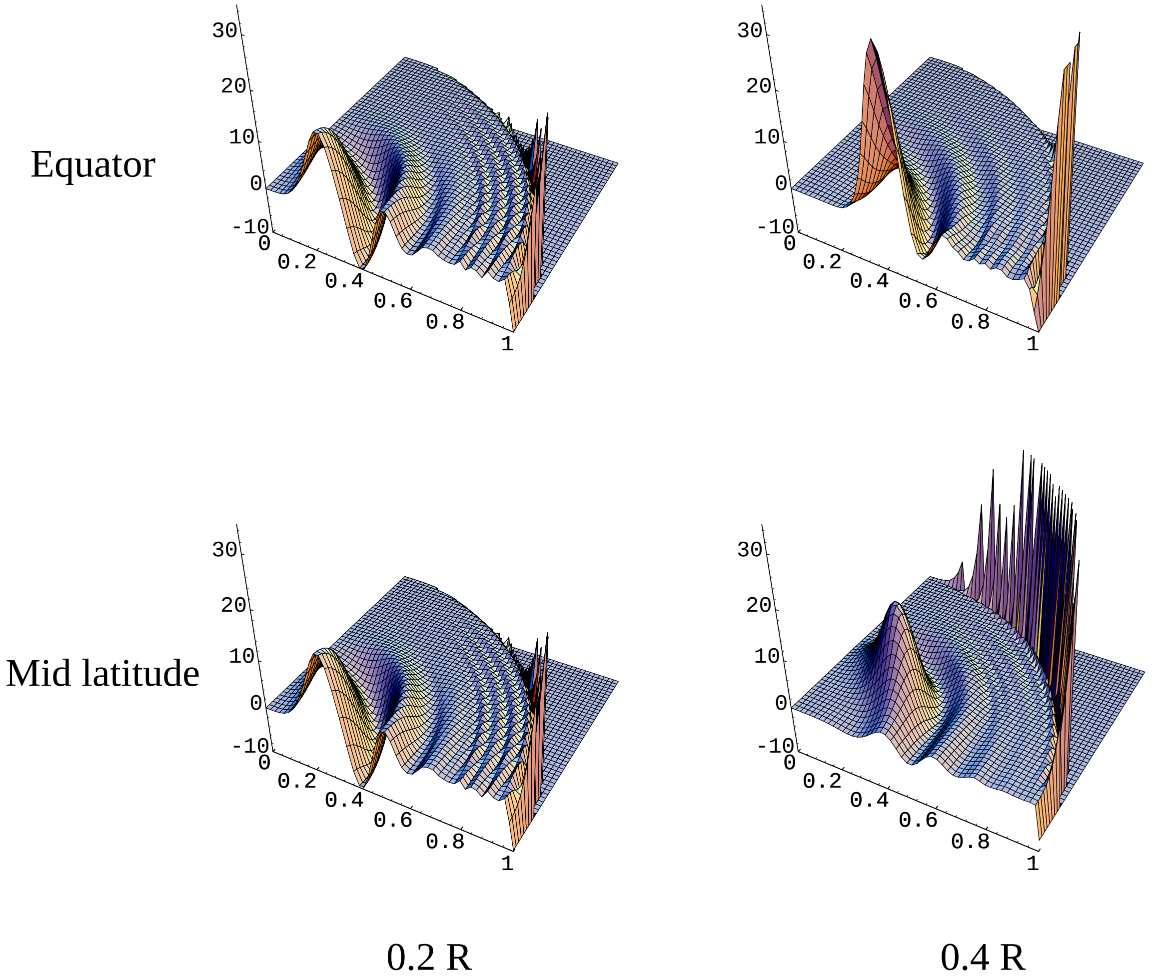


FIG. 26 – *Noyaux de résolution d'une méthode 2D RLS appliquée aux données LOW+IRIS (cf. Fig. 25). Les noyaux présentés ont été calculés en* $0.2R_\odot$ *et* $0.4R_\odot$ *à l'équateur et à mi-latitude. Les pics de surface restent non résolus avec la grille utilisée pour le graphique et leur contribution à l'intégrale totale (en rayon et latitude) des noyaux est négligeable.*

couvrant la même période devrait permettre de mieux isoler les biais éventuels inhérents à chaque type d'observation.

3. **Les différences venant de différentes inversions des mêmes données.**
   Ces différences existent et sont inévitables de par la nature même des différentes méthodes d'inversion (cf. §5). Néanmoins l'examen attentif des noyaux de résolution et des erreurs permet en général d'obtenir une vision cohérente des résultats. Il faut cependant étudier les biais qui peuvent être introduits notamment par le terme de régularisation ou une modélisation du problème inverse mal adaptée au traitement des bas degrés (comme l'utilisation de la relation 1D entre splittings sectoraux et la rotation équatoriale, cf. §3.4)).

Des inter-comparaisons sur l'ensemble de ces points sont en cours qui devraient permettre bientôt d'obtenir une vision plus cohérente de la rotation du cœur solaire. Il apparaît néanmoins les données dans leur ensemble sont compatibles avec une rotation quasiment rigide entre $0.4R_\odot$ et $0.2R_\odot$ et que la rotation très rapide du cœur solaire que prévoyaient certaines théories de l'évolution du moment angulaire (Pinsonneault et al. 1989) peut être exclue.

7 Conclusions et perspectives

En conclusion je dirais que le développement très important des techniques d'inversion dédiées à l'héliosismologie depuis 15 ans a permis d'obtenir une carte très précise de la rotation interne du Soleil. Très précise en ce sens que l'image obtenue très rapidement d'une rotation différentielle de surface persistant dans toute la zone convective puis s'ajustant en une rotation rigide de l'intérieur radiatif a été confirmée et précisée dans ses détails par la multiplication des observations, des techniques d'inversion et des inter-comparaisons alors que les théories capables d'expliquer ce comportement global de la rotation aussi bien dans la zone convective que dans la zone radiative sont toujours en cours d'élaboration. Les observations héliosismiques et les propriétés déduites par inversion constituent donc maintenant de sévères contraintes pour la modélisation des processus de transport de moment angulaire, de mélange des éléments chimiques et d'interaction entre la rotation et les mouvements de la convection turbulente. Les détails tels que la détection de 'jets' ou la caractérisation précise de la tachocline, qui commencent à être accessibles par inversion des observations les plus récentes représentent des opportunités sans équivalent pour tester les modèles de la dynamique interne du Soleil.

Malgré tous les efforts déployés depuis quinze ans pour l'observation des splittings de bas degrés, la rotation du cœur solaire reste incertaine. Bien sûr, la détection, si elle est possible, des modes de gravité, beaucoup plus sensibles à la rotation des couches internes, devrait permettre de résoudre en grande partie ce problème. Mais sans attendre cette éventuelle détection, une analyse plus poussée des différentes sources d'incertitudes devrait permettre de contraindre un peu mieux la rotation du cœur solaire.

Enfin notons qu'il existe de nouvelles techniques qui permettent de sonder les couches proches de la surface par une analyse locale des ondes ('ring diagrams analysis' ou analyse en ondes planes) ou par une analyse 'temps-distance' qui, comme pour la sismologie terrestre ou la tomographie en imagerie médicale, permet d'obtenir de l'information sur les conditions rencontrées par l'onde lors de sa propagation entre deux points de la surface (voir la revue de Hill (1995)). Ces techniques dites 'd'héliosismologie locale' sont toujours en développement et commencent à être appliquées aux observations permettant une résolution spatiale de la surface solaire suffisante telles que GONG (Thompson et al. 1996) ou MDI (Duvall et al. 1997). Ces analyses s'appliquent sur des temps d'observations beaucoup plus courts que ceux nécessaires à la mesure des splittings et devraient donc permettre d'atteindre des informations à plus petites échelles spatiales et temporelles complémentaires de la vision moyenne de la dynamique fournie par l'héliosismologie 'globale'.

Annexes

A Quelques formules utiles

A.1. Les fonctions de Legendre

Les fonctions de Legendre $P_l^m(\mu)$ sont reliées aux polynômes de Legendre $P_l(\mu)$ de degré l par:

$$P_l^m(\mu) = (-1)^m \sin^m(\theta)\, \frac{d^m P_l(\mu)}{d\mu^m}, \qquad \mu = \cos\theta \tag{A1}$$

et vérifient l'équation différentielle:

$$\frac{d^2 P_l^m(\mu)}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dP_l^m(\mu)}{d\theta} = \left(\frac{m^2}{\sin^2\theta} - L^2\right) P_l^m(\mu) \qquad L^2 \equiv l(l+1) \tag{A2}$$

Elles sont orthogonales et telles que:

$$\int_0^\pi P_l^m(\mu) P_k^m(\mu) d\mu = \delta_{kl} \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \tag{A3}$$

On définit les fonctions de Legendre normalisées $\tilde{P}_l^m(\mu)$ par:

$$\tilde{P}_l^m(\mu) = \left[\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right]^{-\frac{1}{2}} P_l^m(\mu) \tag{A4}$$

Ces fonctions vérifient:

$$\int_{-1}^1 \tilde{P}_l^m(\mu) d\mu = 1 \tag{A5}$$

et sont liées aux harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$ par:

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \tilde{P}_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \tag{A6}$$

Les premières fonctions de Legendre d'ordre $m = 1$ sont données par:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1^1(\mu) = & -\sin\theta \\ P_3^1(\mu) = & -\frac{3}{2}\sin\theta(5\mu^2 - 1) \\ P_5^1(\mu) = & -\frac{15}{8}\sin\theta(21\mu^4 - 14\mu^2 + 1) \end{array} \right. \tag{A7}$$

A.2. Les coefficients de Clebsh-Gordon

Avec la convention d'Edmonds (1960) pour la phase des coefficients de Clebsh-Gordon $C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$, on obtient:

$$C^{l1}_{l,1,2j+1,0} = (-1)^j 2^{j+1} \frac{\sqrt{2l+1}}{l(l+1)} \sqrt{\frac{(2l-2j-1)!}{(2l+2j+2)!}} \frac{(2j+1)!!}{j!} \frac{(l+j+1)!}{(l-j-1)!} \tag{A8}$$

Ceci permet, en utilisant (57) et (58), de trouver la relation entre les polynômes $\mathcal{S}^m_{j,l}$ et $\gamma^m_{j,l}$ pour j impair. On obtient:

$$\gamma^m_{2j+1,l} = \sqrt{\frac{4j+3}{4\pi}} v^{(l)}_{2j+1} \mathcal{S}^m_{2j+1,l} \tag{A9}$$

avec:

$$v^{(l)}_{2j+1} = (-1)^j \frac{(2j+1)!!}{(2j)!!} \tilde{v}^{(l)}_{2j+1} \qquad \text{et:} \quad \tilde{v}^{(l)}_{2j+1} = \frac{2^{2j+1}}{l} \frac{(2l+1)!}{(2l+2j+2)!} \frac{(l+j+1)!}{(l-j-1)!} \tag{A10}$$

De plus, on montre facilement que $\tilde{v}^{(l)}_{2j+1} \overset{l \gg j}{\longrightarrow} 1$ si bien que:

$$\gamma^m_{2j+1,l} \overset{l \gg j}{\longrightarrow} (-1)^j \sqrt{\frac{4j+3}{4\pi}} \frac{(2j+1)!!}{(2j)!!} \mathcal{S}^m_{2j+1,l} \tag{A11}$$

B Les polynômes 'pseudo inverses'

On peut réécrire l'équation (59) sous forme matricielle par:

$$\mathbf{W} \simeq \mathbf{PA} \quad \left\{ \begin{array}{l} (W_m \equiv \delta\omega_{nlm}/2\pi)_{m=1..m} \\ (P_{mj} \equiv \mathcal{P}^l_{2j+1}(m))_{\substack{m=1..l \\ j=0..N^{nl}}} \\ (A_j \equiv a^{nl}_{2j+1})_{j=0..N^{nl}} \end{array} \right. \tag{B1}$$

Si les coefficients a sont obtenus à partir des splittings individuels par moindres carrés en minimisant:

$$\chi^2 = \|\mathbf{W} - \mathbf{PA}\|_2^2 \ , \tag{B2}$$

on obtient:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^\dagger \ \mathbf{W} \quad \text{avec:} \ \ \mathbf{P}^\dagger = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}^\top \quad \text{et:} \ \ \mathbf{D} = \mathbf{P}^\top\mathbf{P}. \tag{B3}$$

La matrice $\mathbf{D}$ ainsi définie est diagonale si les polynômes $\mathcal{P}^l_j(m)$ sont orthogonaux sur l'espace discret en m (cf. Eq. (55)), et pleine sinon. D'une manière générale on a donc:

$$^\dagger\mathcal{P}^l_{2j+1}(m) = \mathbf{P}^\dagger_{jm} = \sum_{j'=1}^{N^{nl}} (\mathbf{D}^{-1})_{jj'} \mathbf{P}_{mj'} \tag{B4}$$

et $^\dagger\mathcal{P}^l_{2j+1}(m)$ dépend du nombre N^{nl} de coefficients a cherchés. Pour des polynômes orthogonaux seul le terme diagonal subsiste et

$$^\dagger\mathcal{P}^l_{2j+1}(m) = (\mathbf{D}^{-1})_{jj} \mathbf{P}_{mj} \tag{B5}$$

est indépendant de N^{nl}. L'expression de $\mathbf{D}$ donne dans ce cas la relation:

$$^\dagger\mathcal{P}^l_{2j+1}(m) = \frac{\mathcal{P}^l_{2j+1}(m)}{\sum\limits_{m'=1}^{l} \mathcal{P}^l_{2j+1}(m')^2} \tag{B6}$$

Notons que l'utilisation des polynômes orthonormaux β^m_{jl} suggérée par Ritzwoller & Lavely (1991) conduit à une matrice $\mathbf{D}$ égale à l'identité et donc les polynômes 'pseudo inverse' sont dans ce cas également les polynômes β^m_{jl}.

Références

Abramowitz M, Stegun I.A., 1972, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, p. 1006

Ando H., Osaki Y., 1975, PASJ 27, 581

Antia H.M., Basu S., Chitre S.M., 1998, MNRAS 298, 543

Antia H.M., Chitre S.M., Thompson M.J., 1996, A&A 308, 656

Appourchaux T., 1998, The Structure of the Solar core: an observer's point of view. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Backus G.E., Gilbert J.F. 1968, Geophys. J. 16, 169

Badeva V., Morozov V., 1991, Problèmes incorrectement posés - Théorie et applications, série Automatique, Mason, Paris

Barrett R.K., 1993, On the optimal choice of regularization parameter for the inversion of solar oscillation data. In: Brown T.M. (ed) GONG 1992: Seismic Investigation of the Sun and Stars (A.S.P. Conf. Ser. vol. 42), Astr. Soc. of the Pacific, San Francisco, p. 233

Basu S., Antia H.M., 1997, MNRAS 287, 189

Bos R.J., Hill H.A., 1983, Sol. Phys. 82, 89

Bray R.J., Loughhead R.E., Sunspots, London: Chapman and Hall, 1964

Brookes J.R., Isaak G.R., van der Raay H.B., 1976, Nature 259, 92

Brown T., Morrow C.A., 1987, ApJ 314, L21

Brown T.M., Christensen-Dalsgaard J., Dziembowski W., et al., 1989, ApJ 343, 526

Brummell N.H., Hulburt N.E., Toomre J., 1998, ApJ 473, 494

Chaboyer B., 1998, Internal Rotation, Mixing and Lithium Abundances. Dans: "New Eyes to See Inside the Sun and Stars", Proc. IAU Symposium 185, p. 25

Chaplin W.J., Elsworth Y., Howe R., 1996, MNRAS 280, 849

Charbonneau P., 1998, soumis à ApJ

Charbonneau P., Christensen-Dalsgaard J., Henning R., et al., 1998a, "Sounding Solar and Stellar interiors", Proceedings of the 181st symposium of the IAU (poster volume), Provost J., Schmider F.X. (eds), OCA & UNSA, Nice, p. 161

Charbonneau P., Christensen-Dalsgaard J., Henning R., et al., 1998b, soumis à ApJ

Charbonneau P., MacGregor K.B., 1993, ApJ 417, 762

Charbonnier P., Blanc-Féraud L., Aubert G., Barlaud M., 1997, IEEE Trans. on Image Processing 6(2), 298

Christensen-Dalsgaard J., 1997, Lecture notes on Stellar Oscillations, Fourth Edition, private communication (accessible sur http://www.obs.aau.dk/ jcd/oscilnotes)

Christensen-Dalsgaard J., Hansen P.C., Thompson M.J, 1993, MNRAS 264, 541

Christensen-Dalsgaard J., Larsen R.M., Schou J., Thompson M.J., 1994, Optimally localized kernels for 2D helioseismic inversion. Dans: "GONG'94 Helio- and Astero-Seismology", ASP Conf. Ser. 76, p. 70

Christensen-Dalsgaard J., Schou J., Thompson M.J., 1990, MNRAS 242, 353

Claverie A., Isaak G.R., McLeod C.P., van der Raay H.B., Roca Cortes T., 1979, Nature 282, 591

Claverie A., Isaak G.R., McLeod C.P., van der Raay H.B., Roca Cortes T., 1981, Nature 293, 443

Cox J.P., 1980, Theory of stellar pulsation, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey

Corbard T., 1997, Proceedings of the 9th IRIS meeting held in Capodimonte, Italy, June 1997, A. Cacciani (ed)

Corbard T., Berthomieu G., Gonczi G., Provost J., Morel P., 1995, Solar rotation from 2D inversion. Dans: Hoeksema J.T. et al. (eds) "Helioseismology", Proc. Fourth Soho Workshop, ESA SP-376 (2), Noordwijk, p. 289

Corbard T., Berthomieu G., Morel P., Provost J., Schou J., Tomczyk S., 1997, A&A 324, 298

Corbard T., Berthomieu G., Provost J., Blanc-Féraud L., 1998a, On the use of nonlinear regularization in inverse methods for the solar tachocline profile determination. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Corbard T., Berthomieu G., Provost J., Fossat E., 1998b, The solar core rotation from LOWL and IRIS or BiSON data. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU symp. 181 (poster volume), OCA & UNSA, Nice, p. 79

Corbard T., Berthomieu G., Provost J., Morel P., 1998c, A&A 330, 1149

Corbard T., Blanc-Féraud L., Berthomieu G., Provost J., 1998d, soumis à A&A

Corbard T., Di Mauro M.P., Sekii T. and the GOLF team, 1998e, The solar internal rotation from GOLF splittings. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Craig I.J.D., Brown J.c., 1986, Inverse Problems in Astronomy: a guide to inversion strategies for remotely sensed data, Adam Hilger Ltd, Bristol

Cuypers J., 1980, A&A 89, 207

Deubner F.L., 1975, A&A 44, 371

Deubner F.L., Ulrich R.K., Rhodes E.J., 1979, A&A 72, 177

Di Mauro M.P., Dziembowski W.A., Paterno L., 1998, Rotation of the solar interior: new results by helioseismic data inversions. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Duvall Jr T.L., Dziembowski W.A., Goode P.R., et al., 1984, Nature, 310, 22

Duvall Jr T.L., Harvey J. W., 1984, Nature 310, 19

Duvall Jr T.L., Harvey J.W., Pomerantz M.A., 1986, Nature 321, 500

Duvall Jr T.L., Kosovitchev A.G., Scherrer P.H., 1997, New time-distance helioseismology results from the SOI/MDI experiment. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU symp. 181, Kluwer, Dordrecht, p. 83

Dziembowski W.A., Goode P.R., 1991, The internal rotation and magnetism of the Sun from its oscillations. Dans: Cox A.N., Livingston W.C., Matthews M.S. (eds) "Solar Interior and Atmosphere", The Univ. of Arizonna Press, Tucson, p. 501

Edmonds A.R., 1960, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey

Eff-Darwich A., 1998 Rotation of the solar core: compatibility of the different data sets available. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Eff-Darwich A., Pérez Hernandez F., 1997, A&AS 125, 391

Eldén L., 1984, BIT 24, 467

Elliott J.R., 1997, A&A 327, 1222

Elliott J.R., Gough D.O., Sekii T., 1998, Helioseismic determination of the solar tachocline thickness. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Elliott J.R., Gough D.O., 1998, soumis à ApJ

Gelly B., Ferry-Fraillon D. et al., 1997, A&A 323, 235

Ghosal S., Spiegel E.A., 1991, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 61, 161
Gilman P.A., Miller J., 1986, ApJ Suppl. 61, 585
Glatzmaier G.A., 1987, A review of what numerical simulations tell us about the internal rotation of the Sun. Dans: Durney B.R., Sofia S. (eds) “The Internal Solar Angular Velocity: Theory, Observations and Relationship to Solar Magnetic Fields”, Dordrecht: D. Reidel, p. 263
Golub H., Heath M., Wahba G., 1979, Technometrics 21, 215
Gough D.O., 1981, MNRAS 196, 731
Gough D.O., 1982a, Nature 298, 334
Gough D.O., 1982b, Nature 298, 350
Gough D.O., 1985, dans: “Future Missions in solar heliosphere and space plasma physics”, Rolfe E., Battrick B. (eds) ESA Publication Division SP-235, p. 183
Gough D.O., 1996, Testing solar models: The inverse problem. Dans: Roca Cortés T., Sánchez F. (eds) “The structure of the Sun”, VI Canary Islands Winter School of Astrophysics, Cambridge University Press, p. 141
Gough D.O., 1997, Nature 388, 324
Gough D.O., Sekii T., 1998, On the solar tachocline. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) “Sounding Solar and Stellar interiors”, Proc. IAU symp. 181 (poster volume), , OCA & UNSA, Nice, p. 93
Grec G., Fossat E., Pomerantz M.A., 1980, Nature 288, 541
Grec G., Fossat E., Pomerantz M.A., 1983, Sol. Phys. 82, 55
Hadamard J., 1923, Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations. Yale University Press, New Haven
Hansen P.C., 1992, SIAM Review 34, 561
Hansen P.C., 1994, Numerical Algorithms 6, 1
Hansen C.J., Cox J.P., Van Horn H.M., 1977, ApJ 217, 151
Hathaway D.H., Gilman P.A., Harvey J.W., 1996, Science 272, 1306
Hill F., 1995, Local probes of the solar interior. Dans: Hoeksema J.T. et al. (eds) “Helioseismology”, Proc. 4th SoHO Workshop, ESA SP-376 (1), Noordwijk, p. 63
Hill F., Toomre J., November L.J., 1983, Sol. Phys. 82, 41
Hill F., Stark P.B., Stebbins R.T., et al., 1996, Science 272, 1292
Hiremath K.M., Gokhale M.H., 1995, Model of ‘steady’ parts of rotation and magnetic field in the Sun’s convection zone. Dans: Hoeksema J.T. et al. (eds) “ Helioseismology”, Proc. 4th SoHO Workshop, ESA SP-376 (2), Noordwijk, p. 97
Howard R., Solar rotation, 1984, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 22, 131
Howe R., Antia H., Basu S. et al, 1998, The SOI-MDI high-latitude jet: the evidence for and against. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) “Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars”, ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse
Howe R., Thompson M.J., 1996, MNRAS 281, 1385
Isaak G.R., 1982, Nature 296, 130
Kirsch A., 1996, An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Dans: Mardsen J.E. & Sirovich L. (eds.) “Applied Mathematical Sciences”, vol. 120, Springer-Verlag, New York
Komm R.W., Howard R.F., Harvey, J.W., 1993, Sol. Phys. 143, 19
Korzennik S.G., Cacciani A., Rhodes Jr E.J., Tomczyk S., Ulrich R.K., 1988, Inversion of solar rotation rate vs. depth and latitude. Dans: Rolfe E.J. (ed) Proc. Symp. “Seismology of the Sun and Sun-like Stars”, ESA SP-286, p. 117
Korzennik S.G., Thompson M.J., Toomre J., and the GONG internal rotation team, 1997, Internal rotation and dynamics of the Sun from GONG data. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) “Sounding Solar and Stellar interiors”, Proc. IAU Symp. 181, Kluwer, Dordrecht, p. 211

Kosovichev A.G., 1988, Bull. Crimean Astrophys. Obs., 80, 167
Kosovichev A.G., 1996, ApJ 469, L61
Kosovichev A.G., 1998, Seismic observation of solar tachocline. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181 (poster volume), OCA & UNSA, Nice, p. 97
Kosovichev A.G., Schou J., 1997, ApJ 482, L207
Kosovichev A.G., Schou J., Scherrer P.H., et al., 1997, Sol. Phys. 170, 43
Küker M., Rüdiger G., Kitchatinov L.L., 1993, A&A 279, L1
Kumar P., Quataert E.J., 1997, ApJ 475, L143
Larsen R.M., 1997, Iterative algorithms for two-dimensional helioseismic inversion. Dans: Jacobsen B.H. (ed.) Proc. Interdisciplinary Inversion Workshop 5, University of Aarhus.
Larsen R.M., Hansen P.C., 1997, A&AS 121,587
Lazrek M., Pantel A., Fossat E., et al., 1996, Sol. Phys. 166, 1
Ledoux P., 1951, ApJ 114, 373
Leighton R.B., 1960, Proc. IAU Symp. 12, 321
Leighton R.B., Noyes R.W., Simon G.W., 1962, ApJ 135, 474
Libbrecht, 1989, ApJ 336, 1092
Lynden-Bell D., Ostriker J.P., 1967, MNRAS 136, 293
Menke W., 1989, Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory. Dans: International Geophysics Series, Vol. 45, Academic Press, Inc., San Diego
Merryfield W.J., Toomre J., Gough D.O., 1991, ApJ 367, 658
Meunier N., 1997, Thèse de doctorat, Université D. Diderot - Paris VII
Morrow C.A., 1988, A way to examine rotational splittings without explicit forward or inverse computations. Dans: Rolfe E.J. (ed) Proc. Symp. "Seismology of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-286, p. 137
Pallé P., The state of the art in helioseismic ground-based experiments. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer, Dordrecht, p. 15
Pekeris C.L., Alterman Z., Jarosch H., 1961, Phys. Rev. 122, 1692
Pijpers F.P., 1997, A&A 326, 1235
Pijpers F.P., Thompson M.J., 1992, A&A 262, L33
Pijpers F.P., Thompson M.J., 1994, A&A 281, 231
Pijpers F.P., Thompson M.J., 1996, MNRAS 279, 498
Pinsonneault M.H., Kawaler S.D., Sofia S., Demarque P., 1989, ApJ 338, 424
Rabello Soares C., Roca Cortés T., Jimenéz A., Appourchaux T., Eff-Darwich A., 1997, ApJ 480, 840
Ritzwoller M.H., Lavely E., 1991, ApJ 369, 557
Schou J., 1992, On the Analysis of Helioseismic Data, Thesis, Aarhus University
Schou J., Antia H.M., Basu S., et al., 1998, soumis à ApJ
Schou J., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M.J., 1994, ApJ 433, 389
Schröter E.H., 1985, Sol. phys. 100, 141
Sekii T., 1993a, On an $R^1 \otimes R^1$ inversion technique for solar rotation. Dans: Brown T.M. (ed) ASP Conf. Ser. Vol. 42 "GONG 92: Seismic Investigation of the Sun and Stars", Astron. Soc. Pac., San Francisco, p. 237
Sekii T., 1993b, MNRAS, 264, 1018
Sekii T., 1997, Internal Solar Rotation. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer, Dordrecht, p. 189
Sekii T., Gough D., 1993, A procedure for two-dimensional asymptotic rotational-splitting inversion. Dans: Weiss W.W.& Baglin A.(eds.) "Inside the Stars", IAU Colloquium 137, ASP conf. Series 40, p 569

Snodgrass H.B., 1983, ApJ 270, 288
Snodgrass H.B., 1992, dans: K.L. Harvey (ed) "The Solar Cycle", ASP Conf. Ser. 27, San Francisco, p. 205
Snodgrass H.B., Howard R., Webster L., 1984, Sol. Phys. 90, 199
Snodgrass H.B., Ulrich R.K., 1990, ApJ 351, 309
Solanki S.K., 1993, Space Sci. Rev. 63, 1
Spiegel E.A, Zahn J.-P, 1992, A&A 265, 106
Stepanov A.A., Christensen-Dalsgaard J., 1996, On the choice of trade-off parameter in helioseismic SOLA inversion. Dans: B.H. Jacobsen, K. Mosegaard & P. Sibani (eds) Proc. Interdisciplinary Inversion Conference, University of Aarhus, May 22-24 1995, Lecture Notes in Earth Sciences 63, Springer, p. 54
Talon S., Zahn J.-P., 1998, A&A 329, 315
Tassoul J.-L., Theory of rotating stars, Princeton University Press, 1978
Thompson A.M., 1992, A&A 265, 289
Thompson A.M., Craig I.J.D., 1992, A&A 262, 359
Thompson M.J., 1990, Sol. Phys., 125, 1
Thompson M.J., 1995, Inverse Problems 11, 709
Thompson M.J., 1998, Inversion methods, Proc. IAU Symposium 185, p. 125
Thompson M.J., Toomre J., et al. 1996, science 272, 1300
Tikhonov A.N., 1963, Solution of incorrectly posed problems, Sov. Doklady 4, 1624
Toomre J., Brummell N.H., 1995, Solar convection zone dynamics and rotation. Dans: Hoeksema J.T. et al. (eds) "Helioseismology", Proc. 4th SoHO Workshop, ESA SP-376 (1), Noordwijk, p. 47
Toutain T., 1997, A review of space helioseismology. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer, Dordrecht, p. 39
Ulrich R.K., Boyden J.E., Webster L., et al., 1988, Sol. Phys. 117, 291
Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H., Shibahashi H., 1989, Nonradial oscillations of stars, University of Tokyo Press, Japan
Wahba G., 1977, SIAM J. Numer. Anal. 14, 651
Wilson P.R., Burtonclay D., 1995, ApJ 438, 445
Woodard M.F., Libbrecht K.G., 1993, ApJ, 402, L77
Xia X.-G., Nashed M.Z. 1994, Inverse Problems 10, 785
Zahn J-P., 1997, Stellar Rotation and Mixing. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer, Dordrecht, p. 175
Zahn J.P., Talon S., Mathias J., 1997, A&A 322, 320